ERL-FEL における RF 不安定性

羽島 良一

JAEA

第 100 回 ERL ビームダイナミクス WG
2015.12.17

Contents

ERL における RF 不安定性とは？

加速モード RF の回復不能な不安定化

- **原因＝** ERL **ループでのビーム損失、ビーム遅延（位相の変動）**
- HOM-BBU **と同様に閾値電流が存在** I_{th}
- beam loss instability
- longitudinal instability (phase instability)

参考文献

- L. Merminga et al., Proc. PAC-95, p.2690
- L. Merminga et al.,NIM-A 429, 58 (1999)
- G.A. Krafft et al., USPAS Accelerator Physics, Lecture 6 (June 2013)

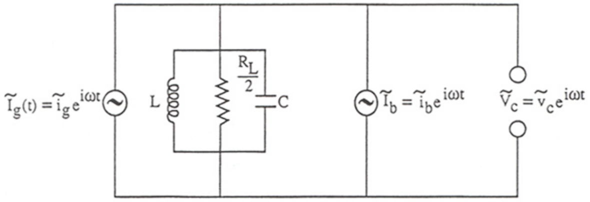
線形解析：単一空洞モデル

RF 空洞の等価回路モデル

- ERL 主空洞として、単一空洞モデル（または複数空洞の vector sum）
- フィードバックはなし

$$\frac{d\tilde{V}_c}{dt} + \frac{\omega_0}{2Q_L}(1 - i\tan\Psi)\,\tilde{V}_c = \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L}\left(\tilde{I}_g - \tilde{I}_b\right) \tag{1}$$

- 電流は、加速ビームと減速ビームの和 $\tilde{I}_b = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$
- 短バンチでは、$|\tilde{I}_1| = 2I_{av}$



線形解析：単一空洞モデル

Merminga の手法

L. Merminga の論文に示されている手法で、不安定性の閾値電流を求める。

RF の変動による加速ビームの摂動

- 入射ビームの擾乱なし $\tilde{I}_1 = I_0 e^{i\Psi_1}$
- 主空洞の RF 振幅と位相の微小な変動を仮定

$$\tilde{V}_c = \left[V_{c0} + \hat{v}(t)\right] e^{i\left[\Psi_c + \hat{\phi}(t)\right]} \tag{2}$$

- 空洞の位相は任意なので、以下は $\Psi_c = 0$ とする
- 加速ビームのエネルギー誤差

$$\epsilon_1(t) = \left[V_{c0} + \hat{v}(t)\right] \cos\left[\hat{\phi}(t) + \Psi_1\right] - V_{c0} \cos\Psi_1 \tag{3}$$

線形解析：単一空洞モデル

減速ビームの線形摂動：ビーム損失と時間誤差

$$\tilde{I}_2 = \left[I_0 + \hat{i}_2(t)\right] e^{i\left[\Psi_2 + \hat{\phi}_2(t)\right]} \quad (4)$$

$$\hat{i}_2(t) = -b_1 I_0 \epsilon_1(t - \tau) \quad (5)$$

$$\hat{\phi}_2(t) = -h_1 \epsilon_1(t - \tau) \quad (6)$$

$$b_1 = -\frac{\eta_x}{LE}, \quad h_1 = \frac{R_{56}\omega}{cE} \quad (7)$$

- η_x は、arc 中で分散が最大となる位置における η_x の値
- L はビーム損失が起こる割合を表す係数、1mm のずれで 10^{-3} のビーム損失が起こる場合は、$L = 1m$ と定義
- b_1 はエネルギーが下がった時に電流が減るように符号を決める
- τ は、ビームが周回に要する時間
- R_{56} の定義：シケインで $R_{56} > 0$ となる符号

線形解析：単一空洞モデル

線形解析

二次以上の摂動項を落とす。

$$\epsilon_1(t) = \hat{v}(t)\cos\Psi_1 - \hat{\phi}(t)V_{c0}\sin\Psi_1 \tag{8}$$

$$\hat{i}_2(t) = -\hat{v}(t-\tau)b_1 I_0 \cos\Psi_1 + \hat{\phi}(t-\tau)b_1 I_0 V_{c0}\sin\Psi_1 \tag{9}$$

$$\hat{\phi}_2(t) = -\hat{v}(t-\tau)h_1 \cos\Psi_1 + \hat{\phi}(t-\tau)h_1 V_{c0}\sin\Psi_1 \tag{10}$$

これらを式 (1) に代入して、虚部と実部を分けて整理する。さらに、ラプラス変換 $\hat{v}(t) \to v(s)$、$\hat{\phi}(t) \to \phi(s)$

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

$det(M) = 0$ **を解いて** s **の根を求めた時に、根の実部が負** $\to$ **正で系は不安定。この時の電流が閾値電流**

線形解析：単一空洞モデル

Matrix の中身

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{\omega_0}{2Q_L} + s - \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} A_1 e^{-s\tau} && (12) \\
M_{12} &= V_{c0}\left[\frac{\omega_0}{2Q_L}\tan\Psi - \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} B_1 e^{-s\tau}\right] && (13) \\
M_{21} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L}\tan\Psi + \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} C_1 e^{-s\tau} && (14) \\
M_{22} &= V_{c0}\left[s + \frac{\omega_0}{2Q_L} + \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} D_1 e^{-s\tau}\right] && (15) \\
A_1 &= -I_0(h_1 \sin\Psi_2 - b_1 \cos\Psi_2)\cos\Psi_1 && (16) \\
B_1 &= I_0(h_1 \sin\Psi_2 - b_1 \cos\Psi_2)\sin\Psi_1 && (17) \\
C_1 &= -I_0(h_1 \cos\Psi_2 + b_1 \sin\Psi_2)\cos\Psi_1 && (18) \\
D_1 &= I_0(h_1 \cos\Psi_2 + b_1 \sin\Psi_2)\sin\Psi_1 && (19)
\end{aligned}
$$

線形解析：単一空洞モデル

s の根と閾値電流

周回による時間遅れ (τ) **が系の時定数（**$2Q_L/\omega$**）に比べて小さいとき** $\tau = 0$ **として、**s **の根は、**

$$s = \left(\frac{\omega_0}{2Q_L}\right)\left\{-1 + \frac{1}{2}I_0R_L\left[(h_1S + b_1C) \pm \sqrt{X}\right]\right\} \tag{20}$$

$$X = (h_1S + b_1C)^2 + \frac{4\tan\Psi}{R_LI_0}(-h_1C + b_1S) - \left(\frac{2\tan\Psi}{R_LI_0}\right)^2 \tag{21}$$

$$S = -\sin(\Psi_1 + \Psi_2) \ , \ \ C = \cos(\Psi_1 + \Psi_2) \tag{22}$$

定常状態で空洞の離調、$\Psi = 0$ **の時 (*)、不安定性の閾値電流（平均電流＝等価電流の半分）は**

$$I_{th,av} = \frac{1}{2R_L(h_1S + b_1C)} \tag{23}$$

(*) **加速、減速ビームが逆位相に設定されている場合に相当。**

状態変数による記述

現実的な ERL-FEL の扱い

空洞が複数ある場合、フィードバックがある場合、FEL による擾乱がある場合などを取り扱うため、状態変数による記述を行い、Scilab/Xcos で数値計算してみる。

単一空洞のモデル

先に示した単一空洞のモデルにおいて、空洞の電圧と位相の変動は

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q_L}\left[\hat{v} + V_{c0}\hat{\phi}\tan\Psi\right] + \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L}\left[-\hat{i}_2\cos\Psi_2 + I_0\hat{\phi}_2\sin\Psi_2\right] \tag{24}$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q_L V_{c0}}\left[-\hat{v}\tan\Psi + V_{c0}\hat{\phi}\right] + \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L V_{c0}}\left[-\hat{i}_2\sin\Psi_2 - I_0\hat{\phi}_2\cos\Psi_2\right] \tag{25}$$

入射ビームの変動はないとした

状態変数による記述

状態変数の定義

加速空洞の振幅と位相の偏差 $(\hat{v}, \hat{\phi})$ を状態変数とし、減速ビームの電流と位相の偏差 $(\hat{i}_2, \hat{\phi}_2)$ を入力変数と考えると、偏差方程式 (24) (25) は、以下のようになる

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \tag{26}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$A = \frac{\omega_0}{2Q_L} \begin{pmatrix} -1 & -V_{c0}\tan\Psi \\ \frac{\tan\Psi}{V_{c0}} & -1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$B = \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L} \begin{pmatrix} -\cos\Psi_2 & I_0\sin\Psi_2 \\ \frac{-1}{V_{c0}}\sin\Psi_2 & \frac{-1}{V_{c0}}I_0\cos\Psi_2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

状態変数による記述

周回軌道によるビーム損失と位相誤差

周回軌道におけるビーム損失、ビーム位相誤差のモデルを Merminga **と同様に選ぶと、減速ビームは**

$$\vec{u}(t) = C\vec{x}(t-\tau)\ ,\quad C = \begin{pmatrix} -b_1 I_0 \cos\Psi_1 & -b_1 I_0 V_{c0} \sin\Psi_1 \\ -h_1 \cos\Psi_1 & -h_1 V_{c0} \sin\Psi_1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

と書けるので、系全体は下図のようになる。周回の時間遅れを無視すると、閉ループ系は $\dot{\vec{x}}(t) = (A+BC)\vec{x}$ **となる。安定性の条件は、行列** $(A+BC)$ **の特性根の実部が負であることであり、**Merminga **の線形解析の結果と一致する。**

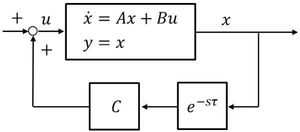


Figure: **空洞の状態変数線図**

800-MeV ERL の例

800-MeV ERL パラメータ

以下のパラメータを仮定する。

- **入射、周回エネルギー＝** 10 MeV、800 MeV、**空洞離調** $\Psi = 0$
- (R/Q) = $10^3\Omega$、$Q_L = 10^7$ → $R_L = 10^{10}\Omega$
- **ビーム位相、加速** $\Psi_1 = 7$ deg. 、**減速** $\Psi_2 = 187$ deg.
- **ビーム損失、**$\eta_x = 1$ m, $L = 1$ m
- **周回軌道全体でアイソクロナス** $R_{56} = 0$

閾値電流

線形解析による閾値電流は、$I_{th,av} = 41$ mA

Scilab/Xcos によるシミュレーション

シミュレーション

- **空洞電圧の変動の初期値** $v(t=0) = -0.1$ V**、周回の時間遅れなし**
- **閾値電流を超えると、空洞電圧の指数関数的な低下を確認**

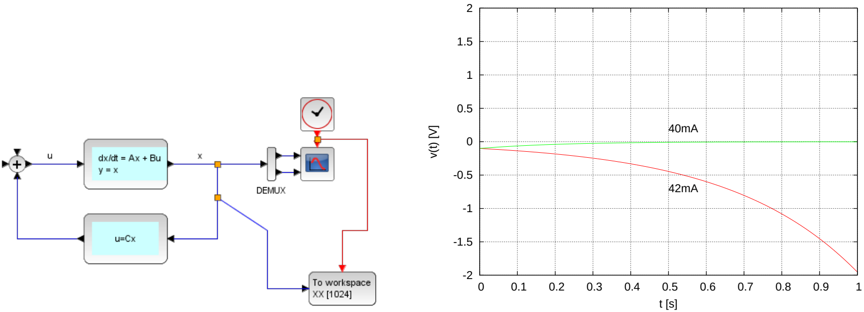


Figure: Scilab/Xcos **による計算結果**

フィードバックの追加

空洞フィードバックのモデル

空洞に入力する高周波源の等価電流 I_g の振幅と位相を可変とする

$$\hat{I}_g = \left[I_{g0} + \hat{i}_g(t)\right] \exp\left(i\left[\Psi_{g0} + \hat{\phi}_g(t)\right]\right) \tag{31}$$

定常状態でビームローディングなし（エネルギー回収）、空洞の離調なしとすると、$\Psi_{g0} = 0$、$I_{g0} = V_c/R_L$

入力ベクトルの修正

$\vec{u}$ **に空洞フィードバックを含める**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{i}_g \\ \hat{\phi}_g \end{pmatrix} \tag{32}$$

フィードバックの追加

フィードバックを含んだ空洞電場の変化

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{v}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L}\left[\hat{v} + V_{c0}\hat{\phi}\tan\Psi\right] \\ &+ \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L}\left[-\hat{i}_2\cos\Psi_2 + I_0\hat{\phi}_2\sin\Psi_2 + \hat{i}_g\right]\end{aligned} \tag{33}$$

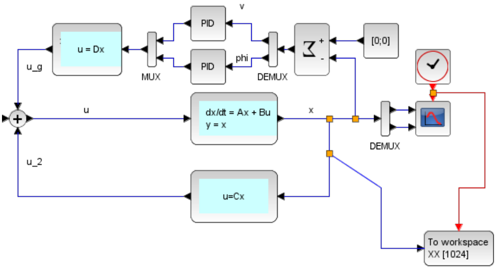
$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q_L V_{c0}}\left[-\hat{v}\tan\Psi + V_{c0}\hat{\phi}\right] \\ &+ \frac{\omega_0 R_L}{2Q_L V_{c0}}\left[-\hat{i}_2\sin\Psi_2 - I_0\hat{\phi}_2\cos\Psi_2 + I_{g0}\hat{\phi}_g\right]\end{aligned} \tag{34}$$

上式から $\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ **における** B **が求められる。**

Scilab/Xcos による空洞モデル

空洞の振幅と位相 ($\vec{x}$) について、PID 制御をおこなう。振幅と位相の偏差から高周波源の等価電流への換算を以下の式で行い、Scilab/Xcos のモデルを作る。

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_g \\ \hat{\phi}_g \end{pmatrix} = D\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/R_L & 0 \\ 0 & 1/R_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \tag{35}$$



1

Figure: Scilab/Xcos によるモデル

Scilab/Xcos によるシミュレーション

計算結果

800-MeV ERL にて、閾値電流を超える平均電流 100 mA でも、フィードバックで安定化できる。(PID パラメータは、v、ϕ ともに [5 1 0] とした)
$R_{56} = \pm 0.2$ m の場合も、同様に安定化できる。

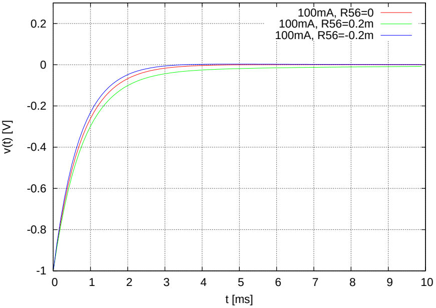
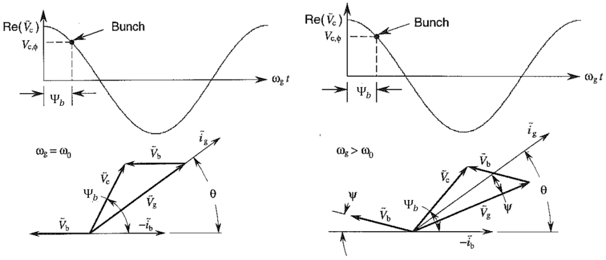


Figure: Scilab/Xcos による計算結果

マイクロフォニクスとの比較

RF 空洞の運転に必要な RF 入力



ビーム電流の変化 ($\hat{i}_b$)、ビーム位相の変化 (Ψ_b)、共振周波数の変化 (Ψ) は、いずれも、入力 RF の増減につながる

$$P_g = \frac{V_c^2}{R_L}\frac{(1+\beta)}{4\beta}\left\{\left[1+\frac{I_0 R_L}{V_c}\cos\Psi_b\right]^2+\left[\tan\Psi-\frac{I_0 R_L}{V_c}\sin\Psi_b\right]^2\right\}$$

Ψ（空洞離調）を適切に選べば、右辺の第二項をゼロとできる。

マイクロフォニクスとの比較

マイクロフォニクス

例：$V_c = 15$ MV **の時**、detuning (δf) **と** RF **入力**

Q_L	δf (Hz)	P_g (kW)
1×10^7	0	5.63
	10	5.76
	30	6.83
3×10^7	0	1.88
	10	2.28
	30	5.49

ビームロス

例：$V_c = 15$ MV、$\Psi_1 = 0$ **の時、周回軌道のビームロスと** RF **入力**

Q_L	loss (μA)	P_g (kW)
1×10^7	0	5.63
	10	5.71
	100	6.41
3×10^7	0	1.88
	10	1.96
	100	2.71

マイクロフォニクスとの比較

減速ビーム位相変化

例：$V_c = 15$ MV、**電流** 10 mA、$\Psi_1 = 7$ deg., **チューナ固定（**$\Psi = 0$**）、チューナ可変（**$\Psi \neq 0$**）**

$R_{56} = 0.2$ m、$\Delta E/E = 1\%$ **で** 3 deg. **の変化**

Q_L	Ψ_2 (deg)	P_g (kW) ($\Psi = 0$)	P_g (kW) ($\Psi \neq 0$)	δf (Hz)
1×10^7	187	5.63	5.63	0
	190	6.90	6.23	22.3
	193	9.74	7.08	44.5
	196	14.1	8.22	66.2
3×10^7	187	1.88	1.88	0
	190	4.52	2.51	22.3
	193	11.5	3.51	44.5
	196	22.8	4.97	66.2

まとめ

- ERL における RF 不安定性とは、ビーム損失、ビーム位相の擾乱により RF 空洞の負荷バランスが乱れて、空洞電圧（位相）が指数関数的に変動する現象
- 単一空洞では、周回軌道のモデル（ビーム損失、ビーム位相）を仮定し、線形解析を行うことで、不安定性の閾値電流が求められる
- 空洞の電圧と位相はフィードバックで制御可能であり、閾値電流を超えても安定化できる（HOM-BBU と異なる）
- 複雑な場合はシミュレーションが必要（時間遅れ、FEL によるビームの擾乱、非線形ビーム損失モデル、複数空洞が存在する場合など）
- ERL-FEL では、FEL 発振にともなうビーム位相変化があり、周回軌道全体をアイソクロナスにしても、これは避けられない
- マイクロフォニクスも含めて、RF 制御の可否、エネルギーアクセプタンス、R_{56} の設定を検討すべきである