線形行列による、CSR での水平方向の emittance 増大の計算

初歩の初歩。

参考文献

- ERL Test facility のバンチ圧縮の最適化(島田美帆)、前回発表
- 羽島良一, “A First-Order Matrix Approach to the Analysis of Electron Beam Emittance Frowth Caused by Coherent Synchrotron Radiation”, JJAP vol.42, (2003), pp.L974-L976
- 羽島良一, “R-Matrix Analysis of the CSR Effect in a Future ERL Light Source”, Proc. of APAC2004, pp.125-127
- 羽島良一, “行列計算を用いたコヒーレント放射光効果の解”, 第 28 回リニアック技術研究会

CSR の効果

今回の話では、

- 何 MeV の加減速があるか
- 具体的なポテンシャルの形がどうか

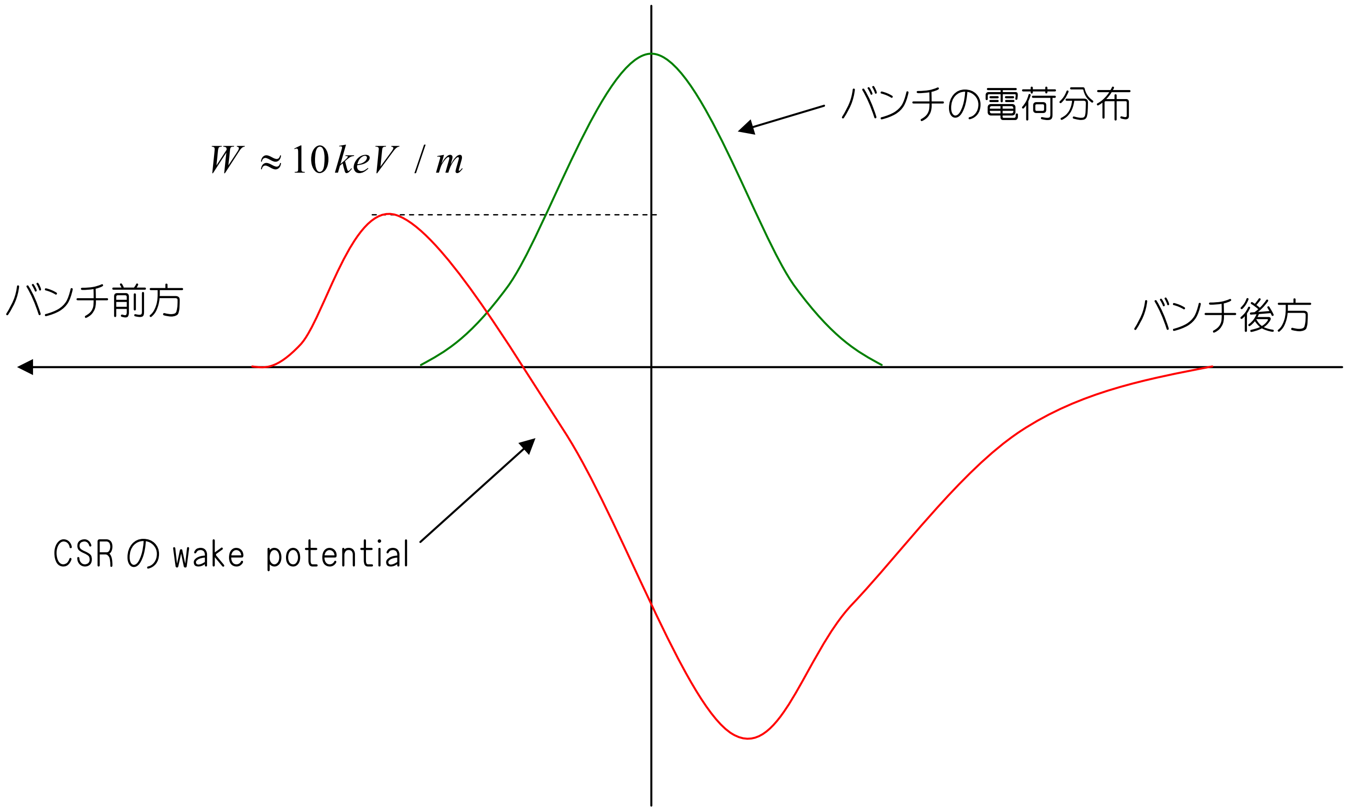
は、話の筋として関係ない。関係ないが、触れずにおくとイメージが沸かないので、正確な話の後で非常に気が引けるが、思いっきり適当な話をしてみる。

普通の SR の放射エネルギー(OHO、土屋さん)

$$P_{total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2 c\gamma^4\beta^4}{3\rho^2}[J/\sec] = 3.79\times 10^{11} E_{[GeV]}{}^2 B_{[T]}{}^2 [eV/\sec]$$

エネルギー200MeV、$\rho = 1m$、$B = 0.667T$、曲げ角 $60\deg = \frac{\pi}{3} rad$ とすると、偏向電磁石1台あたりの通過時間は $T = \frac{L}{c} = 3.49[n\sec]$、放射損失は $P_{total}\cdot T = 23.51[eV]$。1 周だと、$P_{total}\cdot T = 141.12[eV]$ となる。

一方、CSR（縦方向）では、バンチ前方は加速、後方は減速される。文献によく出てくる wake potential の形は、かなり適当に書けば、



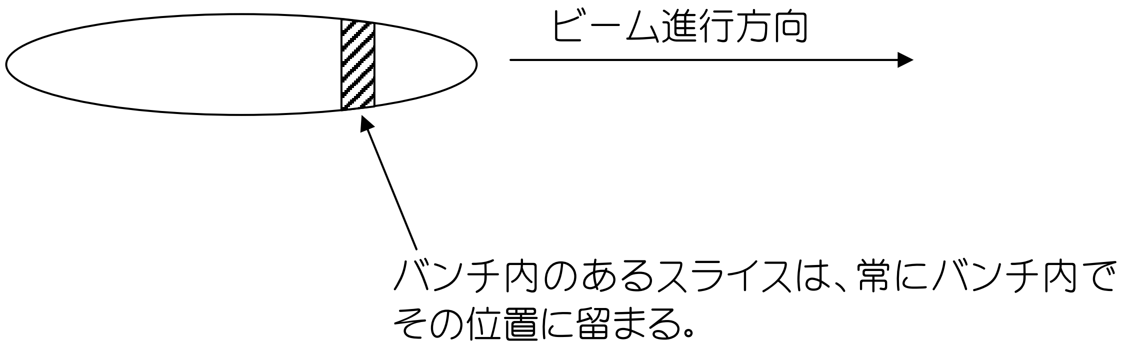
みたいな感じである。（当然、バンチ長、電荷、遮蔽、色々な要素で変わる。）　偏向電磁石 1 台あたり、10keV とか、20keV とか、そのくらいのエネルギー差がバンチ内で生じる。（注：バンチ全体では放射でエネルギー損失である。実際は加速より減速の効果の方が大きく、ポテンシャルは対称ではなく、バンチ前後方で高さも違うし、バンチ中央でゼロクロスではない。かなり適当に書いた図。）

仮定

- CSR でエネルギーだけが変わる。
- エネルギーが変わると、分散関数の効果で水平方向のエミッタンスが増える。
- CSR の横方向の効果は考えない。あくまで縦方向（エネルギーの変化）だけ考える。

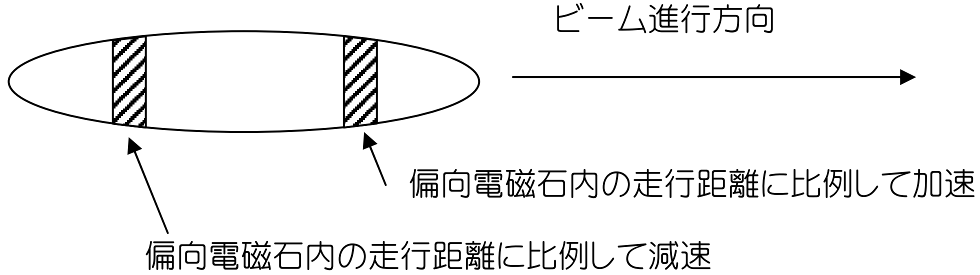
- バンチはいつも同じ長さ、バンチ内の電荷は、バンチ内では動かない。

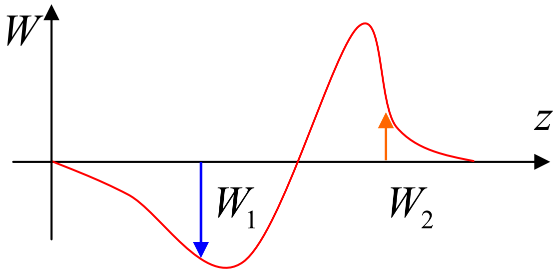
-



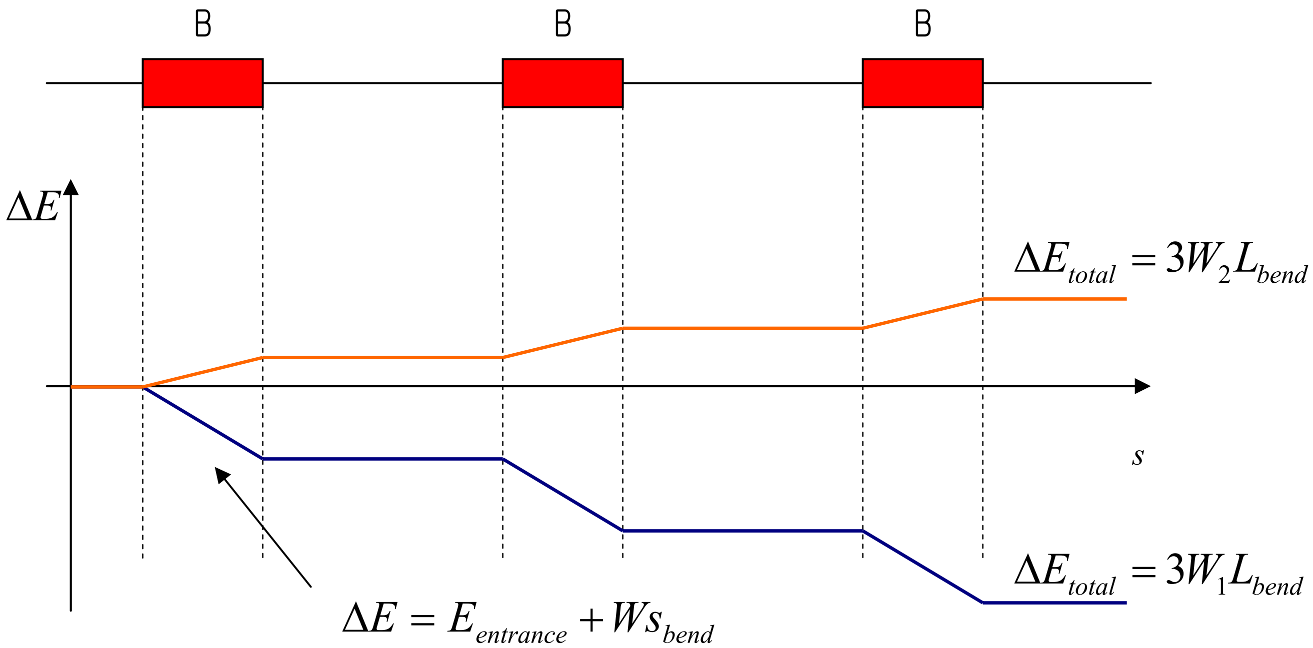
CSR の効果を線形として扱う。

→ 偏向電磁石内で走った距離に比例して、エネルギーが変わる。



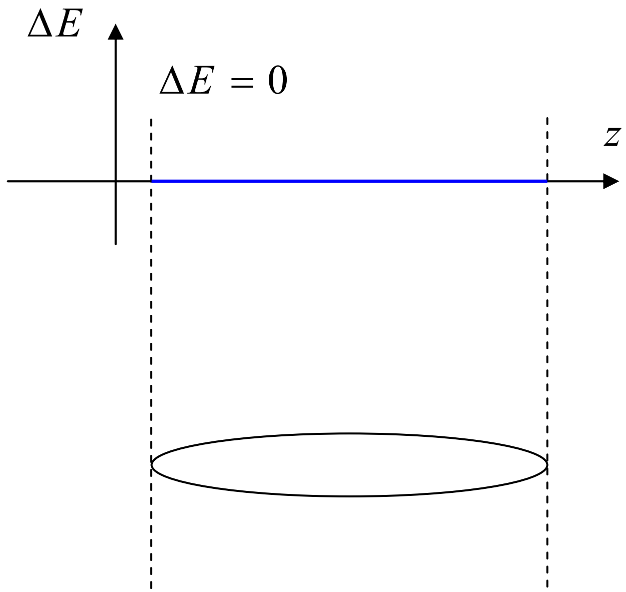


z はビーム物理の z 座標でなく、バンチ内の位置を示す座標。

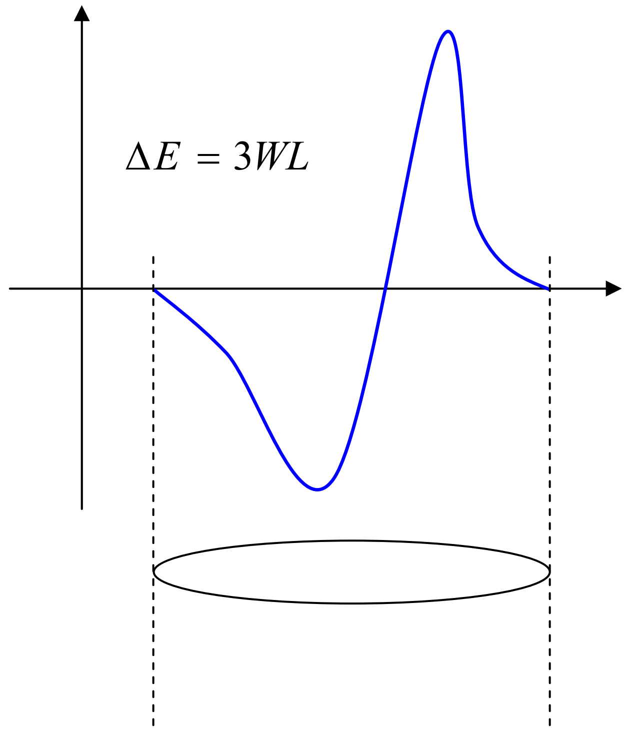


くどいようだが、バンチ内のエネルギーの分布は、

初状態



直線部(B を3台通った後)



となる。

さて、それはそれとして……

偏向電磁石の運動方程式（普通の場合）

　　ふつうの偏向電磁石内の運動方程式は、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{\delta}{\rho}$$

である。ここで、ρ は偏向電磁石の曲率半径、$\delta = \dfrac{\Delta P}{P}$ は運動量偏差である。この方程式を解く。

　　特解　　：　$x = \rho\delta$

　　斉次解　：　$x = A\cos\dfrac{s}{\rho} + B\sin\dfrac{s}{\rho}$

$\longrightarrow$　一般解　：　$x = A\cos\dfrac{s}{\rho} + B\sin\dfrac{s}{\rho} + \rho\delta$

微分して、

$$x' = -\frac{A}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}$$

$s = 0$ で $x = x_0$、$x' = x'_0$ とすると、代入して、

$$x_0 = A + \rho\delta \text{、} x'_0 = \frac{B}{\rho}$$

従って、

$$A = x_0 - \rho\delta \text{、} B = \rho x'_0$$

これを一般解に代入して、結局、

$$x = x_0 \cos\frac{s}{\rho} + x_0'\rho\sin\frac{s}{\rho} + \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right)\delta$$

$$x' = -\frac{x_0}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} + x_0'\cos\frac{s}{\rho} + \delta\sin\frac{s}{\rho}$$

ちなみに、書くまでもないが、

$$\delta = \delta_0 = const.$$

である。これらを行列で書けば、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{s}{\rho} & \rho\sin\frac{s}{\rho} & \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} & \cos\frac{s}{\rho} & \sin\frac{s}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}$$

となる。

偏向電磁石の運動方程式(CSR を考えた場合)

→ 偏向電磁石内で、距離に比例してエネルギーが変わる場合の運動方程式

エネルギー変化を考え、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{\delta(s)}{\rho}$$

とする。ただし、エネルギー変化は、偏向電磁石内での進む距離に対して線形であり、その係数は、設計エネルギーで規格化した wake potential $\kappa[m^{-1}]$

$$\kappa = \frac{W}{E_0}$$

で書けるとする。ここで、$W[{}^{eV}\!/_{m}]$は単位長さあたりの wake potential、$E_0[eV]$は設計エネルギーである。偏向電磁石入り口でのエネルギー偏差をδ_0とすると、

$$\delta = \delta_0 + \kappa s$$

である。これを代入して、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{\delta_0 + \kappa s}{\rho}$$

を解く。

特解　：　$x = \rho\delta + \rho\kappa s$

斉次解　：　$x = A\cos\dfrac{s}{\rho} + B\sin\dfrac{s}{\rho}$

一般解　：　$x = A\cos\dfrac{s}{\rho} + B\sin\dfrac{s}{\rho} + \rho\delta + \rho\kappa s$

微分して、$x' = -\dfrac{A}{\rho}\sin\dfrac{s}{\rho} + \dfrac{B}{\rho}\cos\dfrac{s}{\rho} + \rho\kappa$

$s = 0$ で $x = x_0$、$x' = x_0'$ とすると、代入して、

$$x_0 = A + \rho\delta \text{、} x_0' = \frac{B}{\rho} + \rho\kappa$$

従って、

$$A = x_0 - \rho\delta \text{、} B = \rho x_0' - \rho^2\kappa$$

これを一般解に代入して、結局、

$$x = x_0\cos\frac{s}{\rho} + x_0'\rho\sin\frac{s}{\rho} + \rho\left(1 - \cos\frac{s}{\rho}\right)\delta + \rho^2\left(\frac{s}{\rho} - \sin\frac{s}{\rho}\right)\kappa$$

$$x' = -\frac{x_0}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} + x_0'\cos\frac{s}{\rho} + \delta\sin\frac{s}{\rho} + \rho\left(1 - \cos\frac{s}{\rho}\right)\kappa$$

となる。

CSRを考えた方程式では、偏向電磁石の中で線形にエネルギーが変化し、そのエネルギー変化に伴って分散関数によって水平方向に位置のずれが生じる。入り口で元々あったエネルギーのずれ δ の中には、最初からあったエネルギー偏差と、考えている偏向電磁石より手前の偏向電磁石内の CSR によってエネルギーが変化した分の両方が含まれている。これを分離した方がよいので、分離することにする。

$$x = x_0 \cos\frac{s}{\rho} + x_0'\rho\sin\frac{s}{\rho} + \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right)\left(\delta_0 + \delta_{CSR}\right) + \rho^2\left(\frac{s}{\rho} - \sin\frac{s}{\rho}\right)\kappa$$

$$x' = -\frac{x_0}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} + x_0'\cos\frac{s}{\rho} + \left(\delta_0 + \delta_{CSR}\right)\sin\frac{s}{\rho} + \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right)\kappa$$

繰り返すが、δ_{CSR} は、考えている偏向電磁石よりも上流の偏向電磁石で変化したエネルギーであり、最初の偏向電磁石内では $\delta_{CSR,1st} = 0$ 、2番目の偏向電磁石内では $\delta_{CSR,2nd} = \kappa L$ 、3番目では $\delta_{CSR,3rd} = 2\kappa L$ 、トリプレットを出た後の直線部では $\delta_{CSR,straight} = 3\kappa L$ である。

- 普通の偏向電磁石の場合、ビームにエネルギー分散があるから、横方向にビームが広がる。
  →エネルギー分散は一般にバンチ全体で「均等」であるため、バンチは全体として「ぼわっ」と膨れる。
- CSR の場合、エネルギー分散がゼロでも、エネルギーが変わっていき、分散関数を通じて横方向に位置がずれる。
  →CSR によるエネルギー変化は、バンチの進行方向の位置に依存する。進行方向の「スライス」で考えると、ビームは広がらず、重心位置がずれるだけ。

この方程式はの解は転送行列で書ける。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta_0 \\ \delta_{CSR} \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{s}{\rho} & \rho\sin\frac{s}{\rho} & \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right) & \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right) & \rho^2\left(\frac{s}{\rho}-\sin\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho}\sin\frac{s}{\rho} & \cos\frac{s}{\rho} & \sin\frac{s}{\rho} & \sin\frac{s}{\rho} & \rho\left(1-\cos\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \delta_0 \\ \delta_{CSR} \\ \kappa \end{pmatrix}$$

例えば、$\rho = 1m$、$\theta = \frac{L}{\rho} = \frac{\pi}{3}$ の時、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta_0 \\ \delta_{CSR} \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/2 & \pi/3-\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \pi/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \delta_0 \\ \delta_{CSR} \\ \kappa \end{pmatrix}$$

　さらに、

$$x = x_\beta + \eta\delta + \kappa\zeta = x_\beta + \eta\left(\delta_0 + \delta_{CSR}\right) + \kappa\zeta$$

と、分離すると、ベータトロン振動は、

$$\begin{pmatrix} x_\beta \\ x'_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\beta 0} \\ x'_{\beta 0} \end{pmatrix}$$

初期エネルギー偏差に伴う分散関数は、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ \delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & \rho(1-\cos\theta) \\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta'_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

CSR エネルギー偏差による CSR 分散関数は

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta' \\ \delta_{CSR} \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & \rho(1-\cos\theta) & \rho^2(\theta-\sin\theta) \\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \rho(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 & \rho\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta'_0 \\ \delta_{CSR} \\ \kappa \end{pmatrix}$$

となる。

蹴りの方向

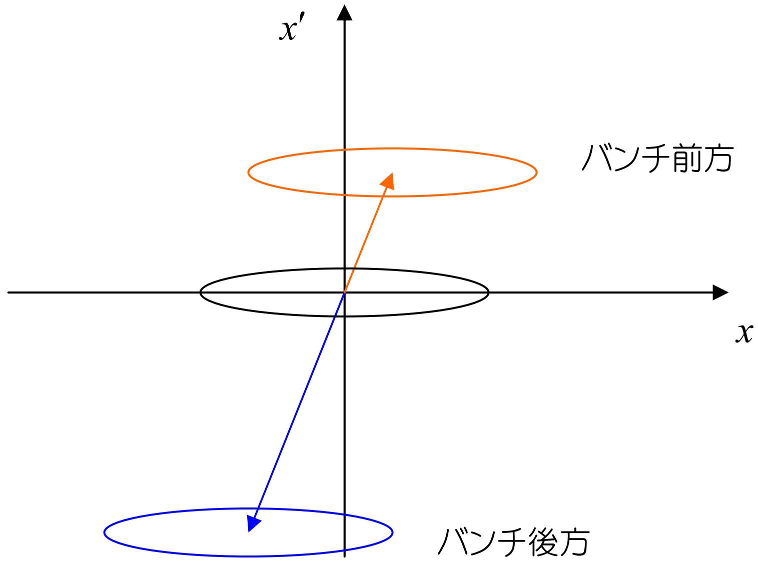
1つめの偏向電磁石では、入り口で $x_0 = 0$ 、$x'_0 = 0$ 、$\delta_0 = 0$ 、$\delta_{CSR} = 0$ とすれば、出口の重心の座標は

$$x = \rho^2(\theta - \sin\theta)\kappa = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\kappa$$

$$x' = \rho(1 - \cos\theta)\kappa = \frac{\kappa}{2} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \approx 70.08\,\mathrm{deg}$$

$(\delta_{CSR} = \kappa L)$

となる。これを位相空間で書けば、蹴りは以下のようになる。



途中はどうなるのか？

2台目以降の偏向電磁石では、入り口の x 、x'（上流で蹴られたものが転送されてきた分）、$\delta_{CSR} \neq 0$ 、全て考えなければいけない。ただし、線形の効果しか考えていないので、CSR を入れても、位相空間における各スライスの重心座標は κ に線形に書け、ある一直線上に載っている。

入口 ：

$$x = x_\beta + \eta\delta + \kappa\zeta = x_\beta + \eta\delta_0 + (\eta L + \zeta)\kappa$$

$$x' = x'_\beta + \eta'\delta + \kappa\zeta' = x'_\beta + \eta'\delta_0 + (\eta' L + \zeta')\kappa$$

スライス重心

$$x_c = (\eta L + \zeta)\kappa$$

$$x'_c = (\eta' L + \zeta')\kappa$$

途中 ：

$$x = x_\beta + \eta\delta + \kappa\zeta = x_\beta + \eta\delta_0 + (\eta(L + s(\theta)) + \zeta)\kappa$$

$$x' = x'_\beta + \eta'\delta + \kappa\zeta' = x'_\beta + \eta'\delta_0 + (\eta'(L + s(\theta)) + \zeta')\kappa$$

出口 ：

$$x = x_\beta + \eta\delta + \kappa\zeta = x_\beta + \eta\delta_0 + (2\eta L + \zeta)\kappa$$

$$x' = x'_\beta + \eta'\delta + \kappa\zeta' = x'_\beta + \eta'\delta_0 + (2\eta' L + \zeta')\kappa$$

スライス重心

$$x_c = (2\eta L + \zeta)\kappa$$

$$x'_c = (2\eta' L + \zeta')\kappa$$

ラティスの途中では、$\eta \neq 0$ 、$\eta' \neq 0$ なので、複雑である。

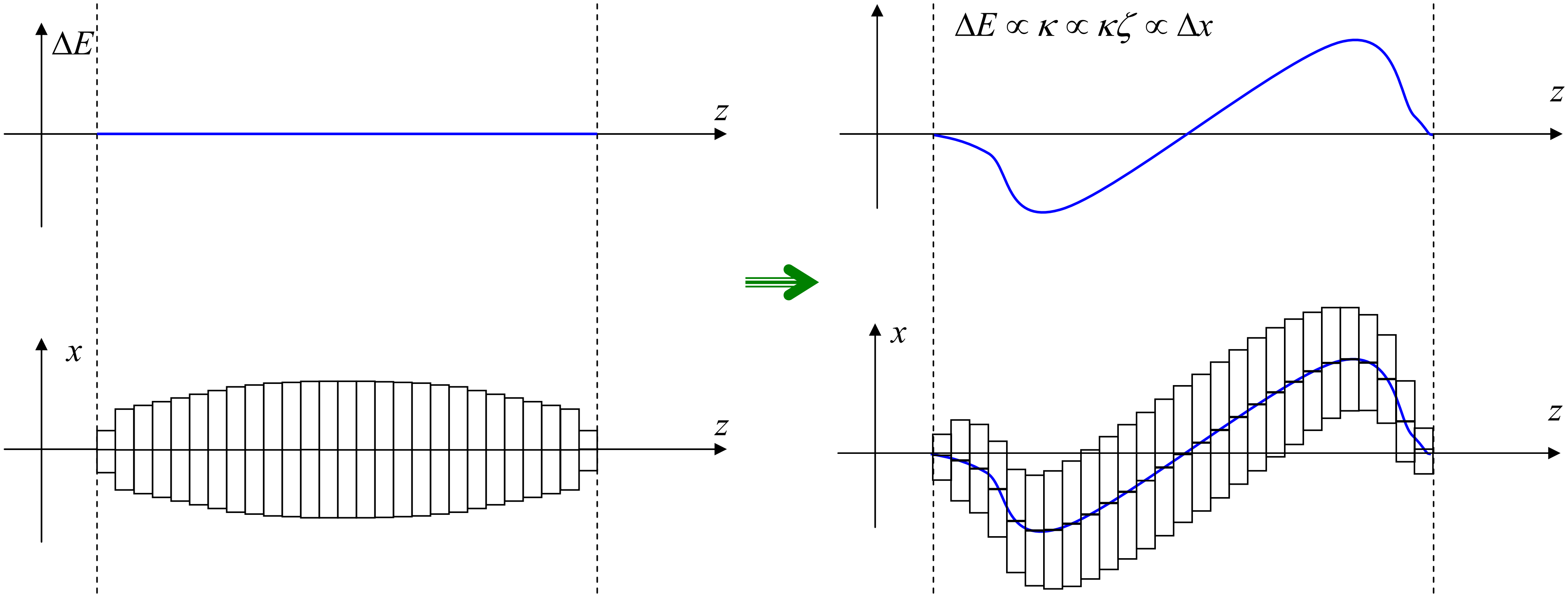
直線部では、$\eta = 0$ 、$\eta' = 0$ なので、

$$x = x_\beta + \zeta\kappa$$

$$x' = x'_\beta + \zeta'\kappa$$

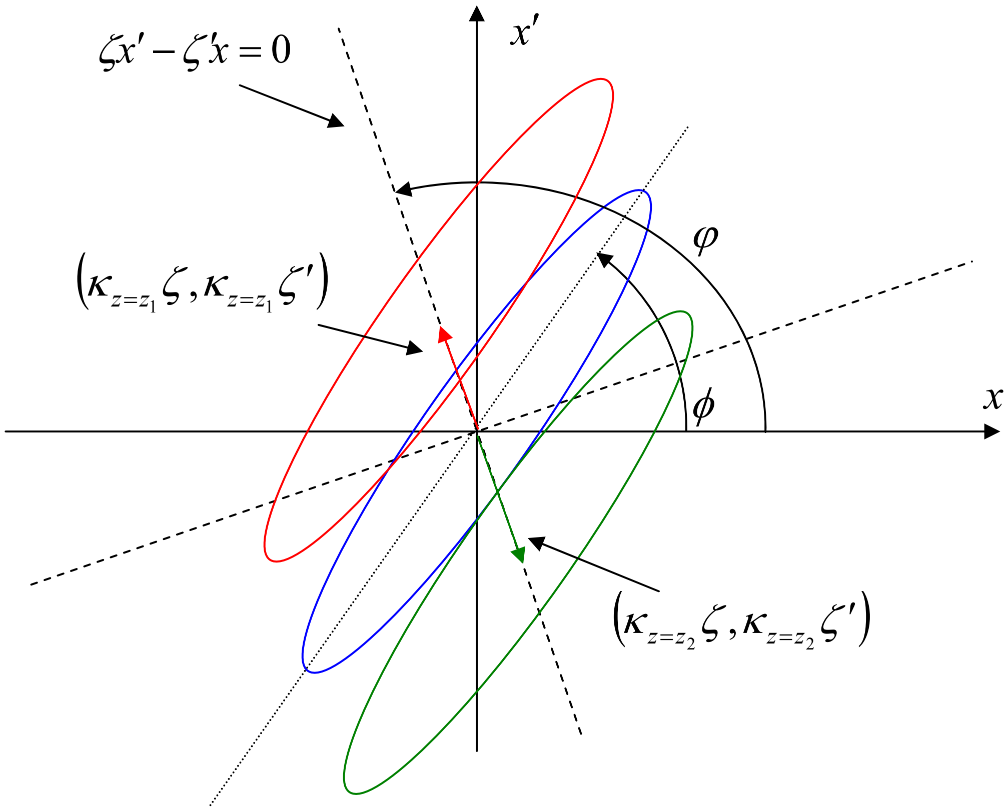
と書ける。

結局、色消しセル（$\eta = 0$、$\eta' = 0$）の出口では、



となる。

位相空間で書けば、



となる。

考えている点の Twiss パラメータで決まるバンチ(スライス)の位相空間における角度は

$$\tan 2\phi = \frac{-2\alpha}{\gamma - \beta}$$

であり、CSR 分散関数によるバンチスライスの移動は、直線

$$\zeta x' - \zeta' x = 0$$

に沿うので、

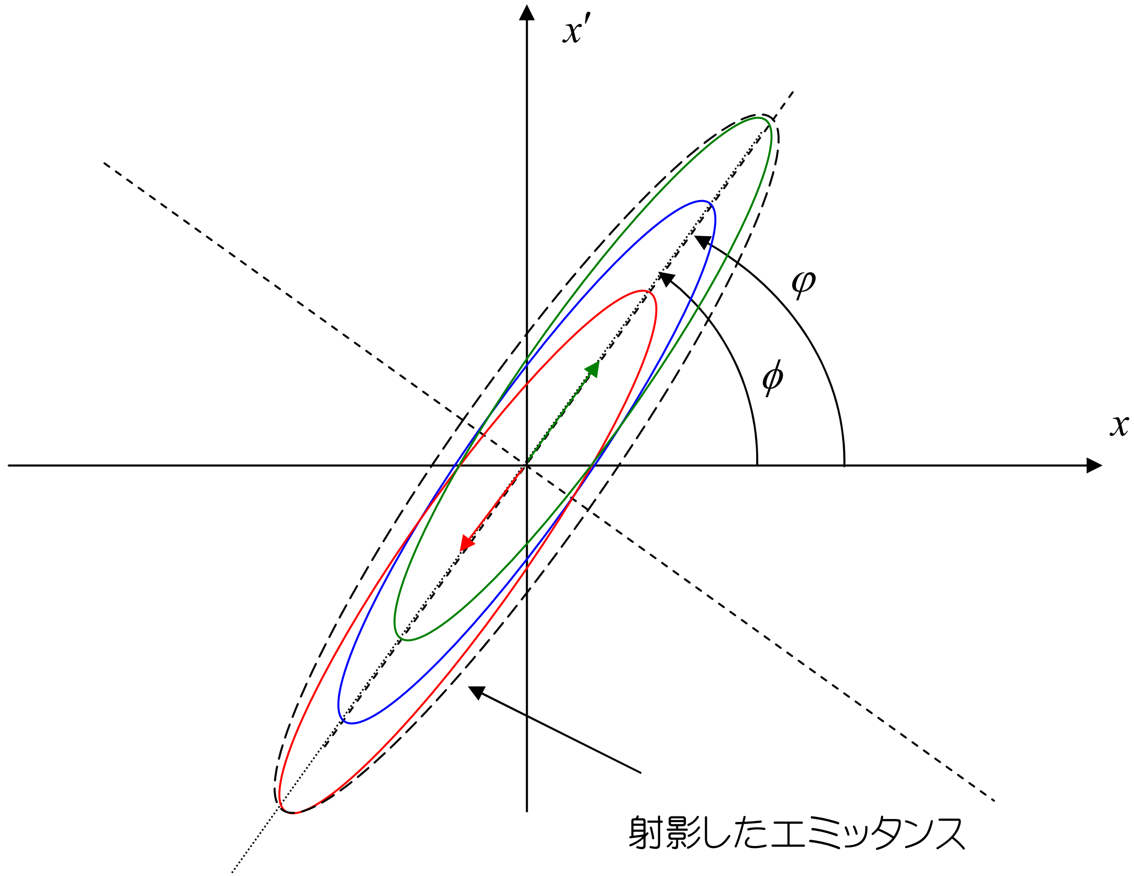
$$\tan \varphi = \frac{\zeta'}{\zeta}$$

である。バンチスライスを全部同じ空間へ射影した場合のエミッタンスを最小にするためには、

$$\phi = \varphi$$

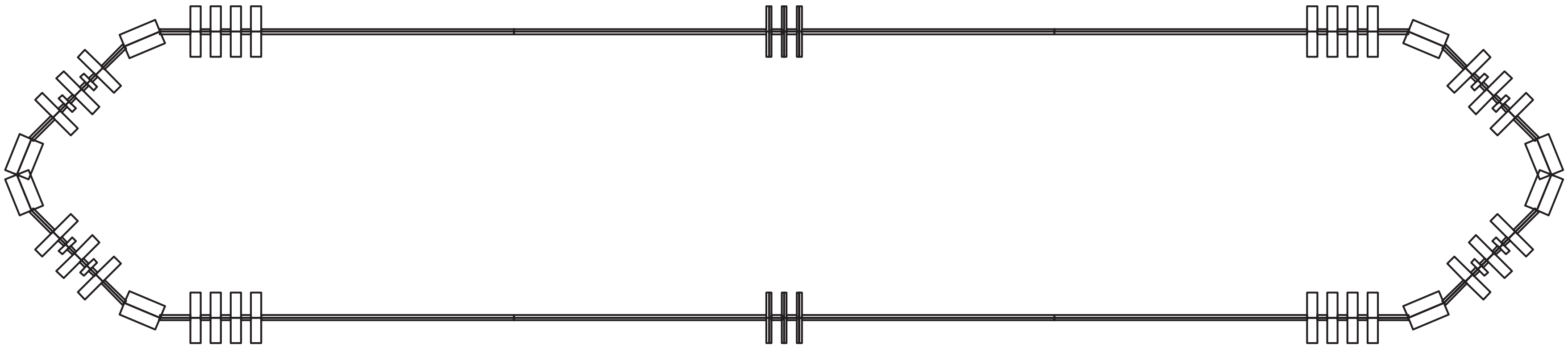
になるようにすればよい。

そうすると、



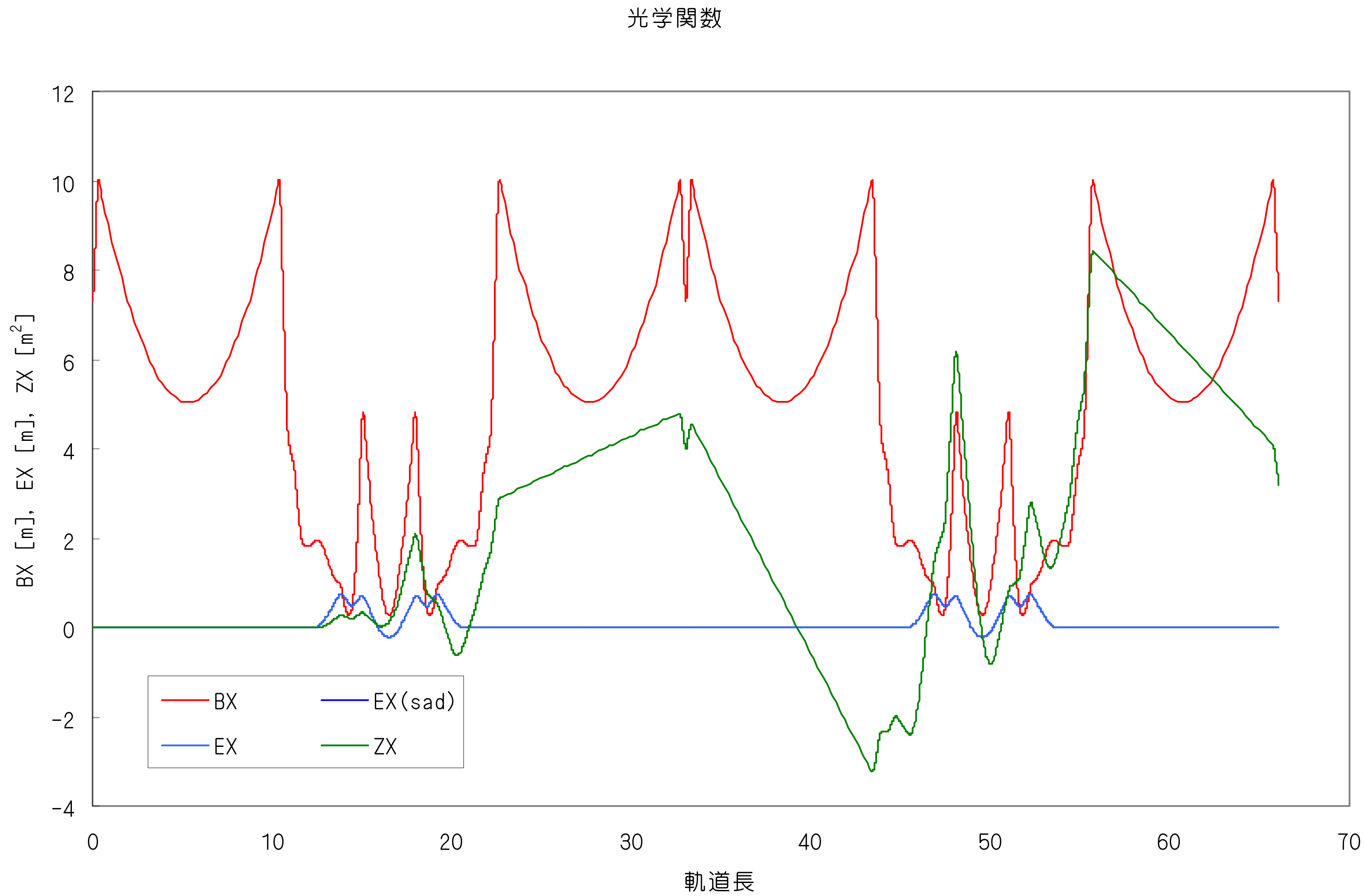
となる。

tba45 で計算してみる



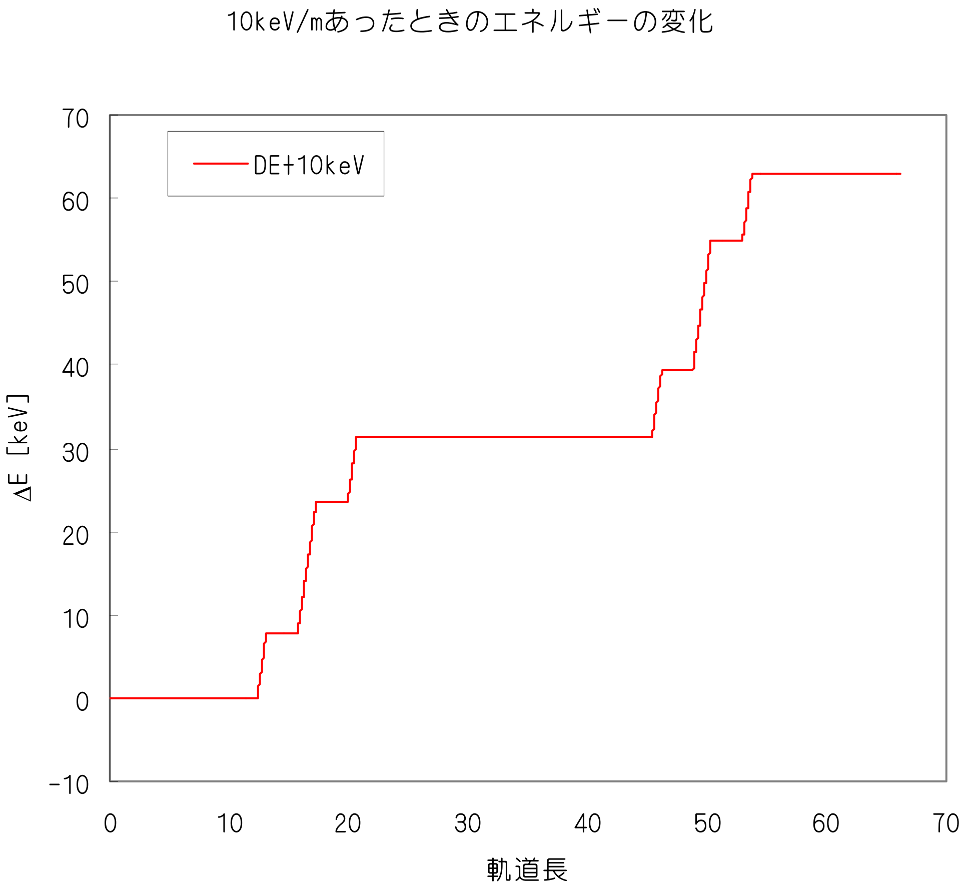
- 弧部のBは、45 度、90 度、45 度、曲率半径は 1m。
- 計算の始点は、長直線部中央。
- マッチングしてみたわけではなくて、ただ計算しただけ。

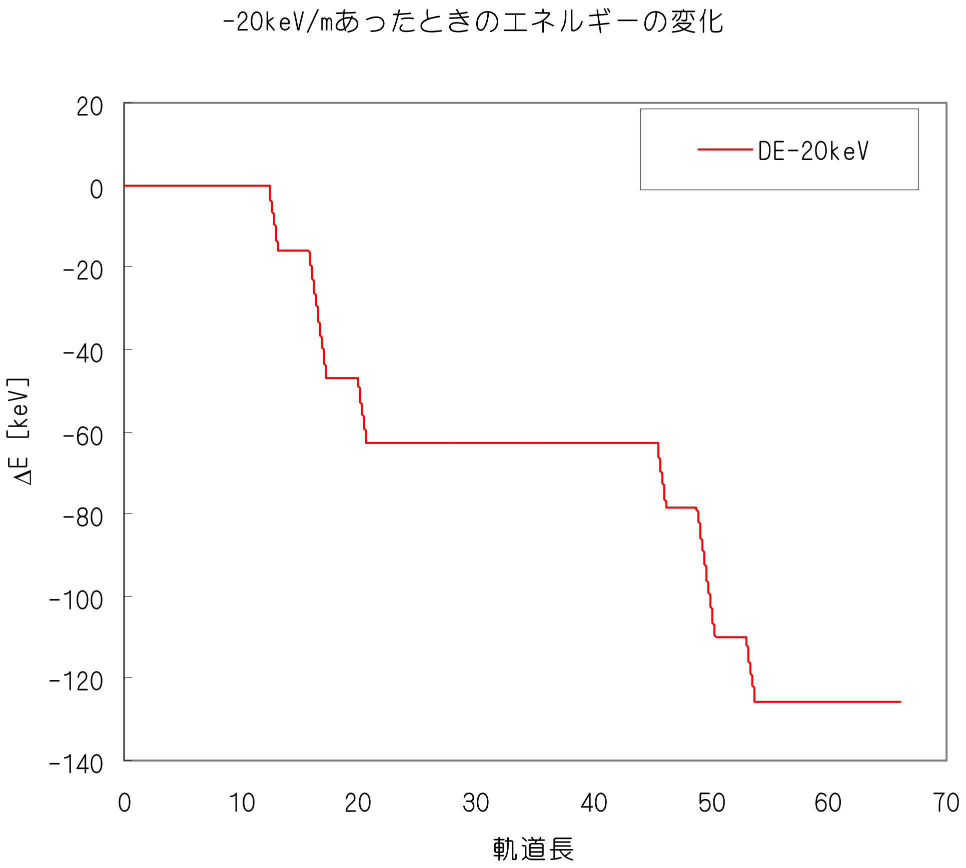
光学関数



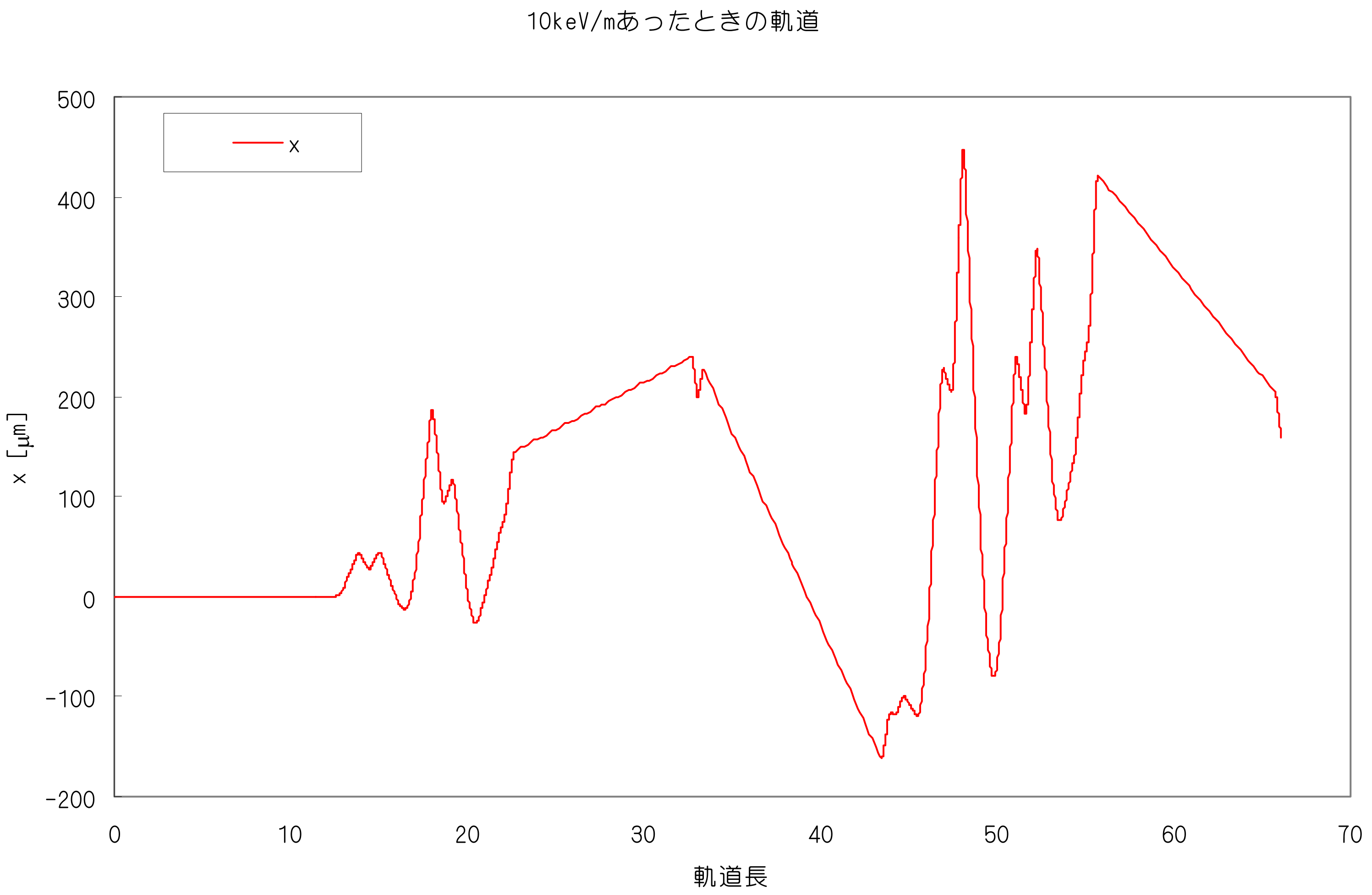
光学関数
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
BX [m], EX [m], ZX [m2]
0
10
20
30
40
50
60
70
軌道長
BX
EX(sad)
EX
ZX

W=+10keV/m、-20keV/m あった時のエネルギー変化

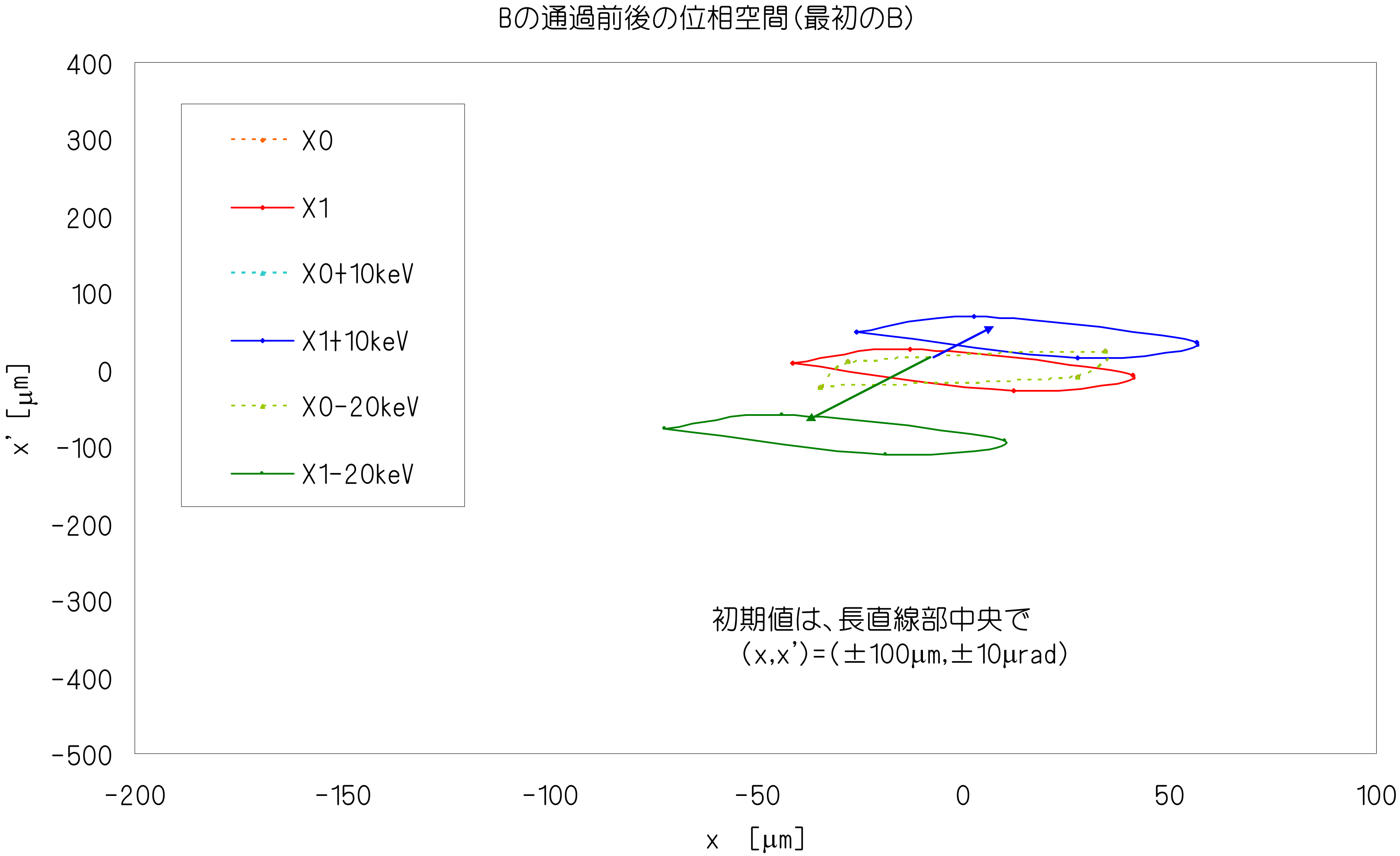




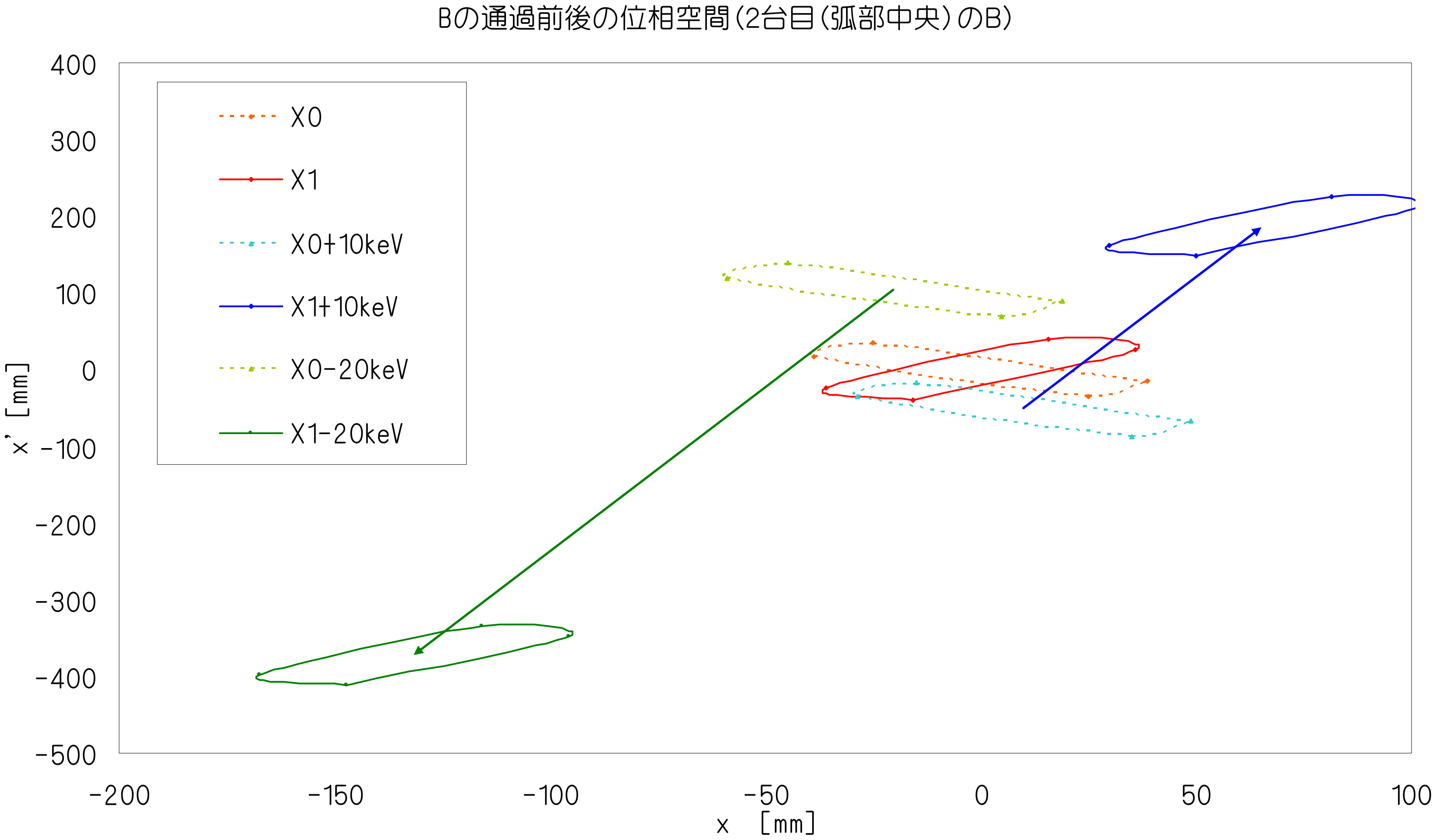
10keV/m あった時の軌道



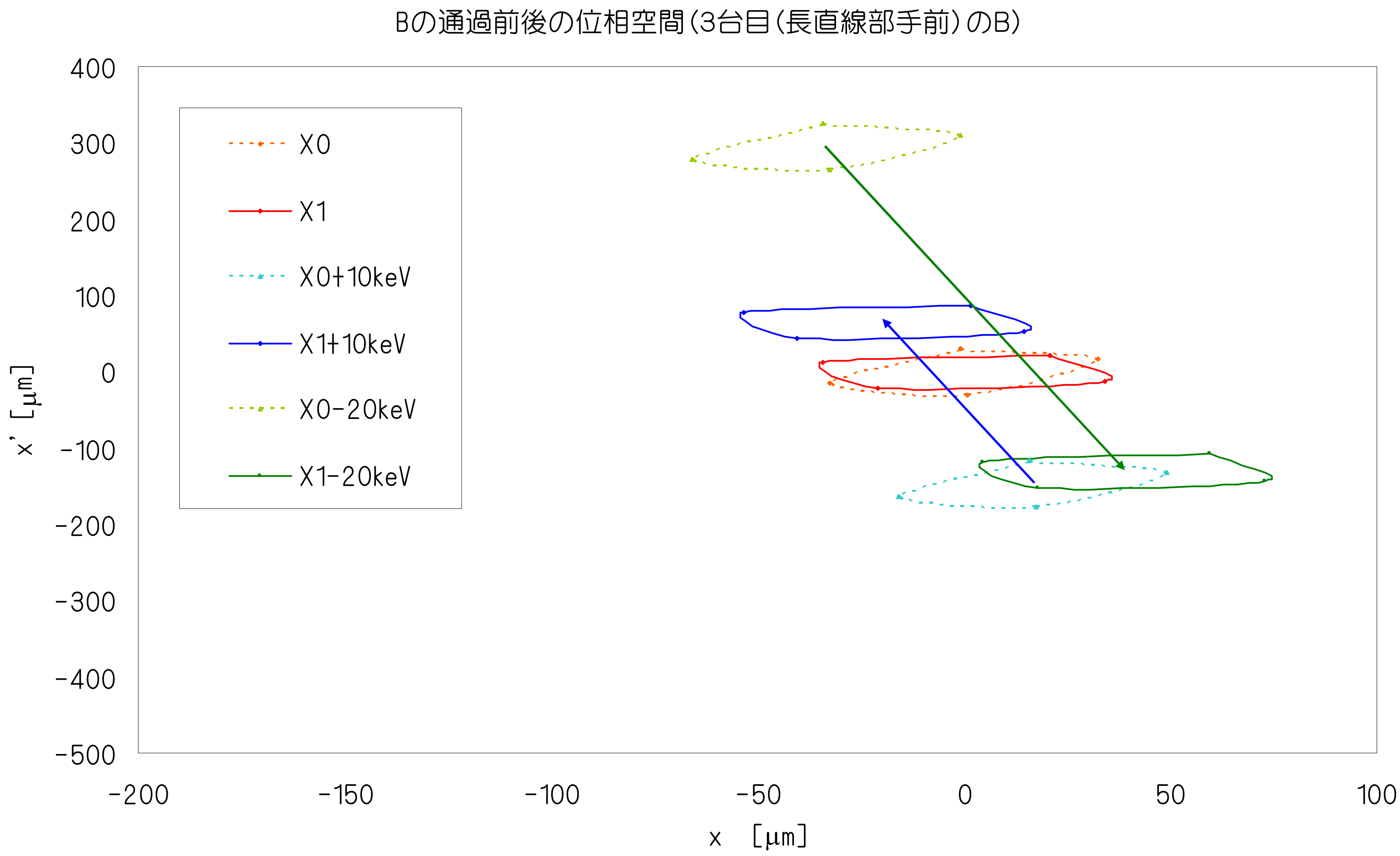
各Bでの蹴り（4点しか計算してないので、形は正しくない、縦横の縮尺も違う。）



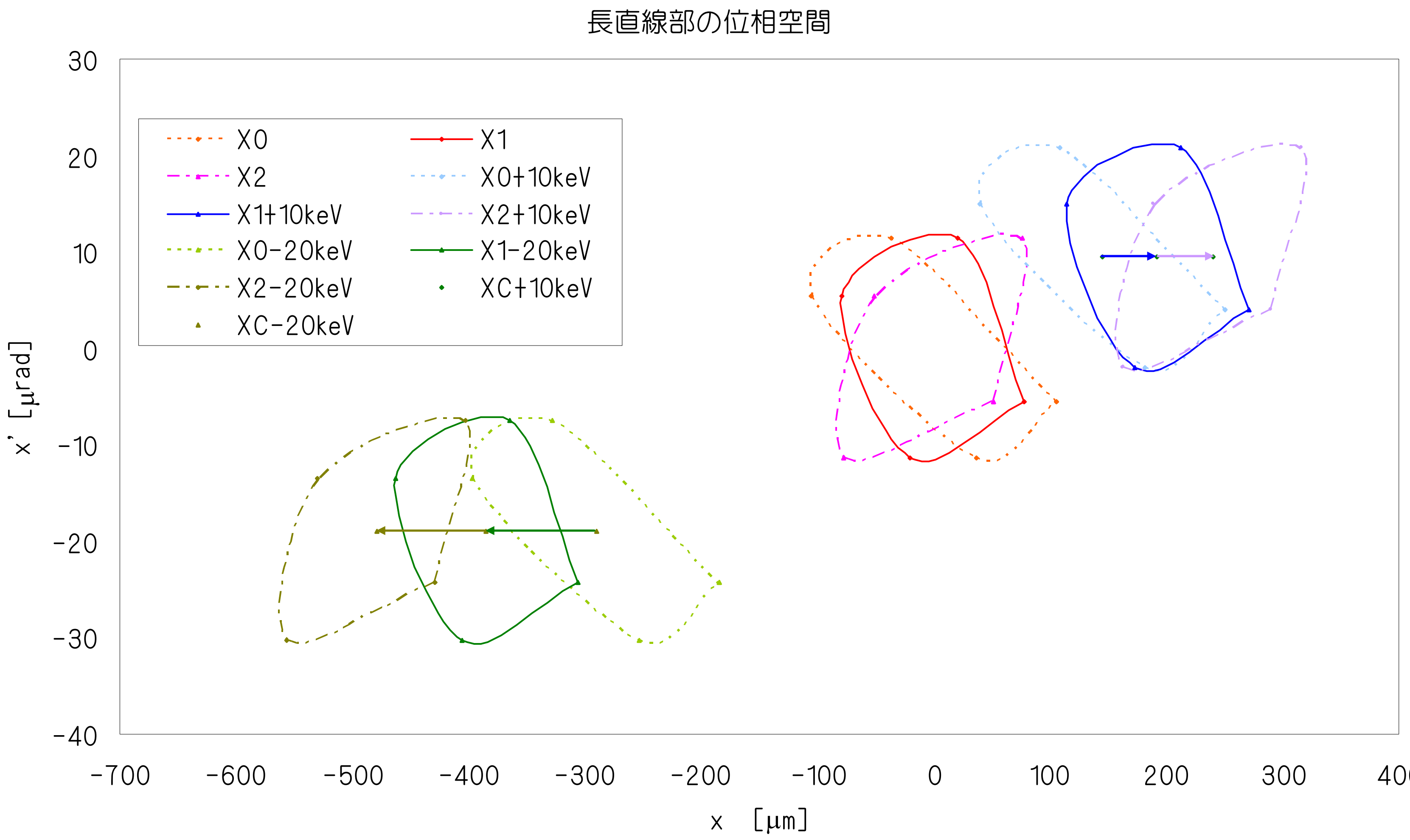
各Bでの蹴り(4点しか計算してないので、形は正しくない、縦横の縮尺も違う。)



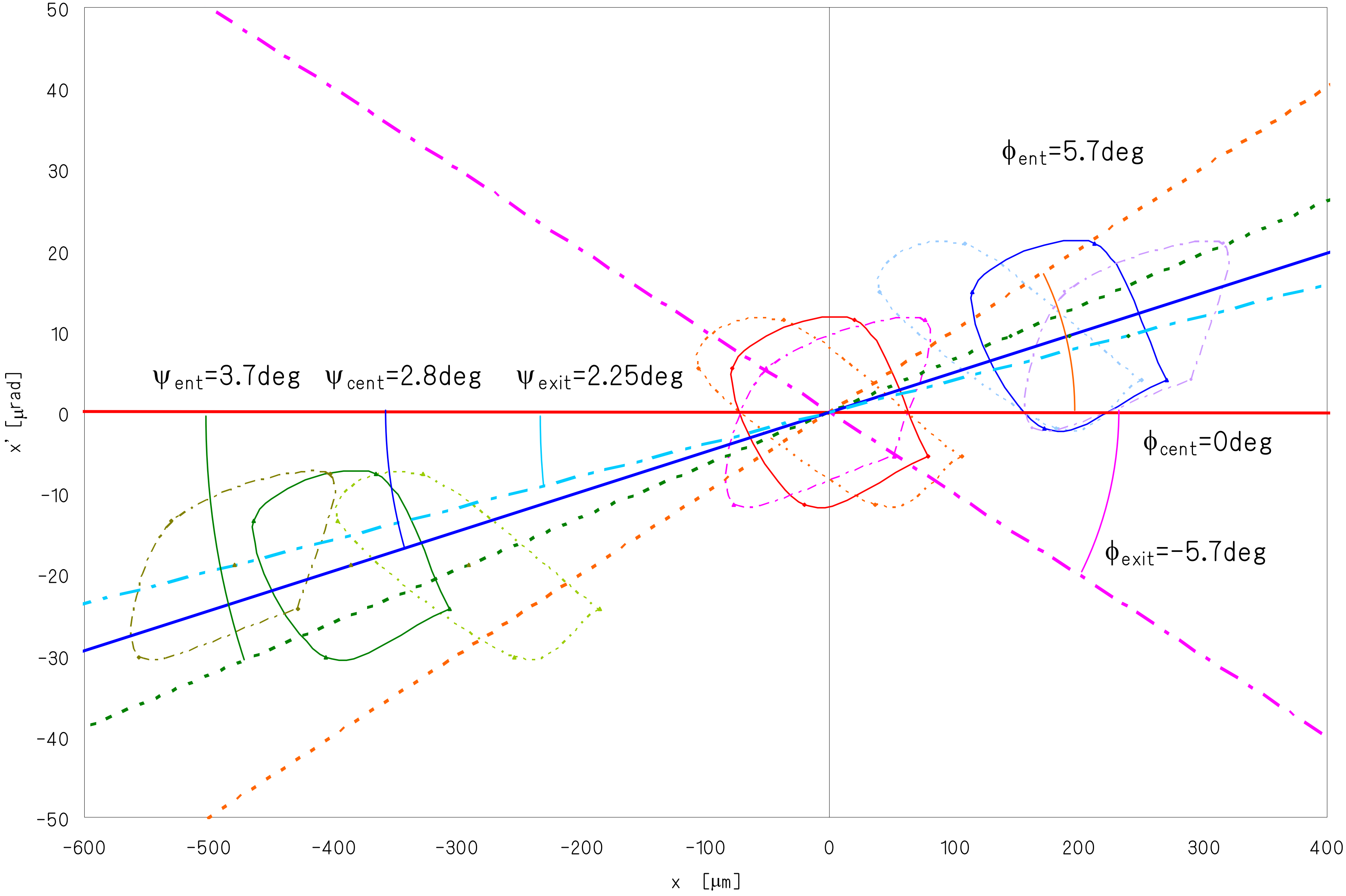
各Bでの蹴り（4点しか計算してないので、形は正しくない、縦横の縮尺も違う。）



挿入光源部分の入り口、中央、出口
（4点しか計算してないので、形は正しくない、縦横の縮尺も違う。）



位相空間と CSR による蹴りの角度



結論

- ちゃんとしたポテンシャル、バンチ圧縮やバンチ内部での電荷分布の変化を考慮に入れた、真面目な計算が、やっぱり大切なのであろう。
- 初期エネルギー分散の効果と CSR によるスライスのエネルギー分散のどちらが効くのかの問題だが、CSR が優勢の場合は、長直線部で $x_c = (2\eta L + \zeta)\kappa = 0$、$x'_c = (2\eta' L + \zeta')\kappa = 0$ というマッチングをしたら色消しよりも射影エミッタンスが小さくなりそうな気がする。
- 初期条件が重要なので、merger とのマッチングが重要である。