

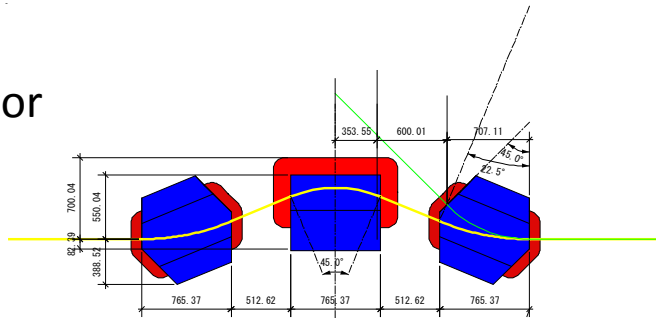
ERL ビームダイナミクスWG

島田 美帆

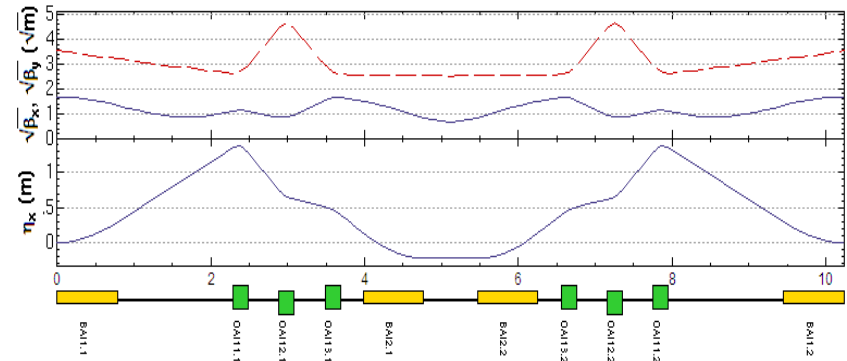
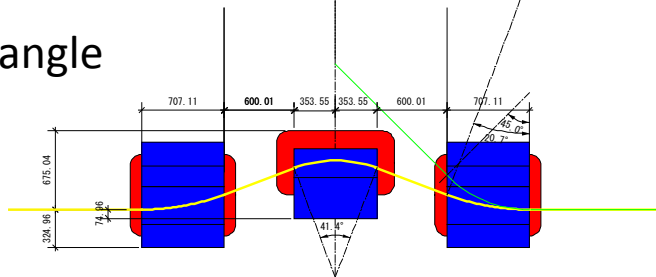
2009年9月29日 14:00 ~
3号館5F 会議室

内側ループのオプティクス (アイソクロナスオプティクスについての考察)

1. sector



2. rectangle

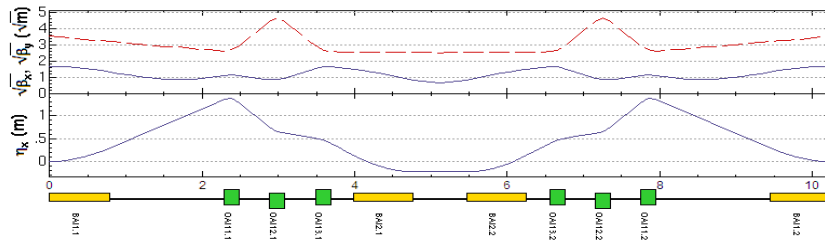


図：内側ループのオプティクスの例

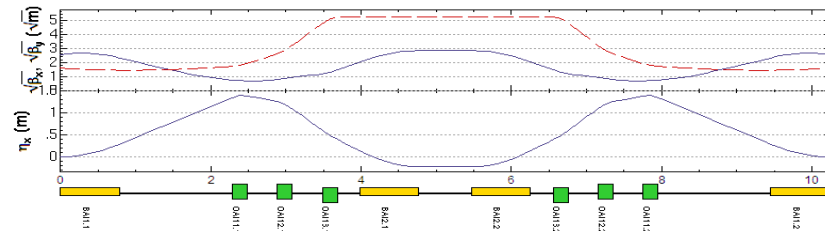
- 2つのエッジに対してSADでOpticsを計算
- 以下のパラメーターの初期値を変えて、様々なOpticsを調べた。
 - トリプレットのK1
 - 偏向電磁石入口のTwissパラメーター

内側ループでsector場合

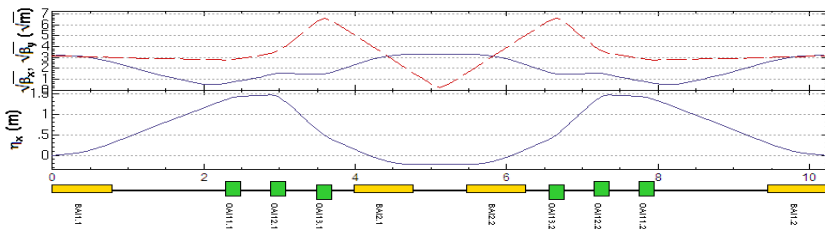
- 3つのパターンがある。



1. FDFのtriplet
 1.50, -1.64, 1.34 ~ 1.53, -1.81, 1.44



2. FFDのtriplet
 0.804, 0.655, -0.611 ~ 0.73, 0.79, -0.81

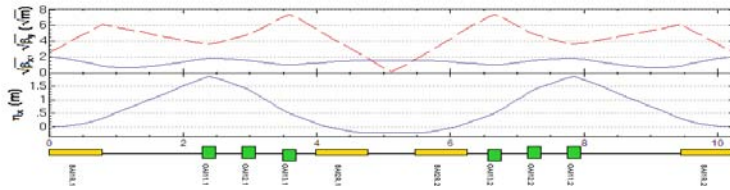


3. FFDのtriplet
 0.45, 1.22, -1.55 ~ 0.45, 1.22, -1.56

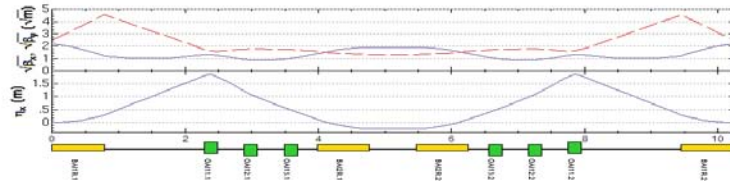
2.FFDのtripletが一番許容範囲が広い。

内側ループでrectangleの場合 (中央はsector)

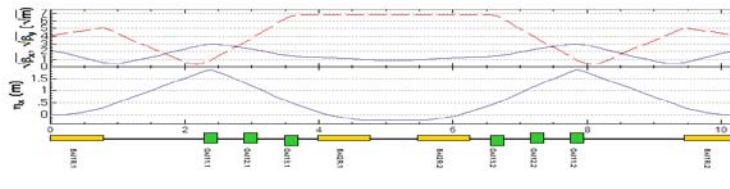
- 5つのパターンがあった。



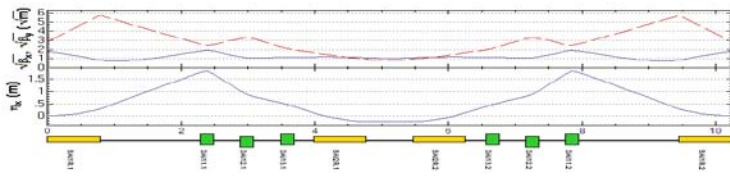
1. FFDのtriplet
1.00, 0.499, -1.31付近



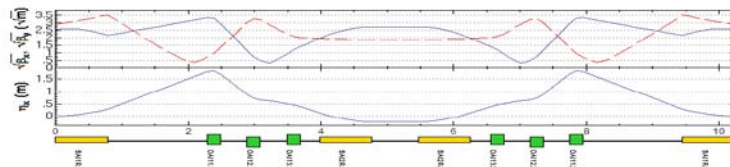
2. FDDのtriplet
1.37, -0.576, -0.0349 ~ 1.29, -0.309, -0.296



3. FFDのtriplet
QAI* = 1.16, 0.117, -0.782付近
(分散関数は1.と似ている。)



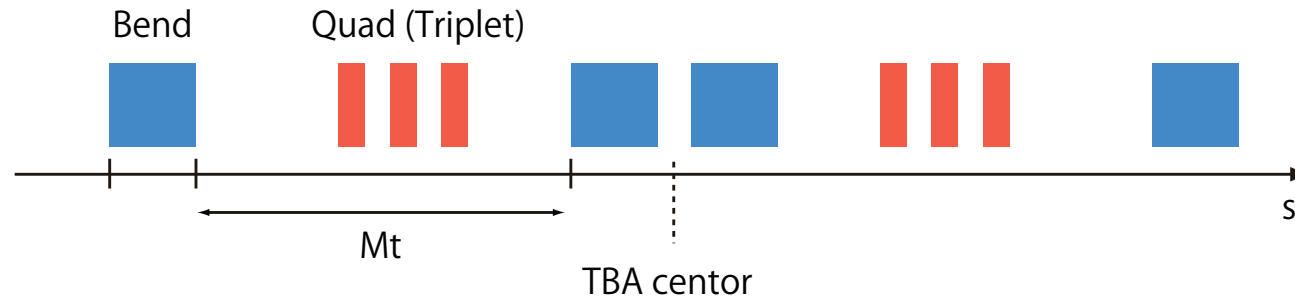
4. FDFのtriplet
1.51, -1.20, 0.477 ~ 1.50, -1.17, 0.47



5. FDFのtriplet
1.65, -2.05, 1.01 ~ 1.62, -1.82, 0.878

TBA isochronous optics

線形加速器なので解析的に解けるのではないか？
原田さんのCDRの式を元に転送行列を求めた。



図：TBA のコンポーネント

TBAの中心で $\eta'_x = 0$ となる場合、転送行列 M_t はBendの曲率半径 ρ と角度 θ_0 でほぼ決まる。任意の変数 a を用いて次の様に書ける。

$$M_t = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{\rho[f(\theta_0) - a(1 - \cos \theta_0)]}{\sin \theta_0} \\ \frac{a(-2\theta_0 + \sin \theta_0) - \sin \theta_0}{\rho f(\theta_0)} & \frac{1 + m_{12}(a, \theta_0)m_{21}(a, \theta_0)}{a} \end{pmatrix}$$

ここで $f(\theta_0) \equiv -\frac{2\theta_0}{\tan \theta_0} + \cos \theta_0 + 1$ である。
 ρ は m_{12} の分子と m_{21} の分母にのみに現れる。

K1 of the triplet

Newton-Raphson 法を用いて triplet の K1 を求めた。

最初のバンドのエッジは rectangle と sector の 2 つを検討。(中央のバンドは sector のまま)

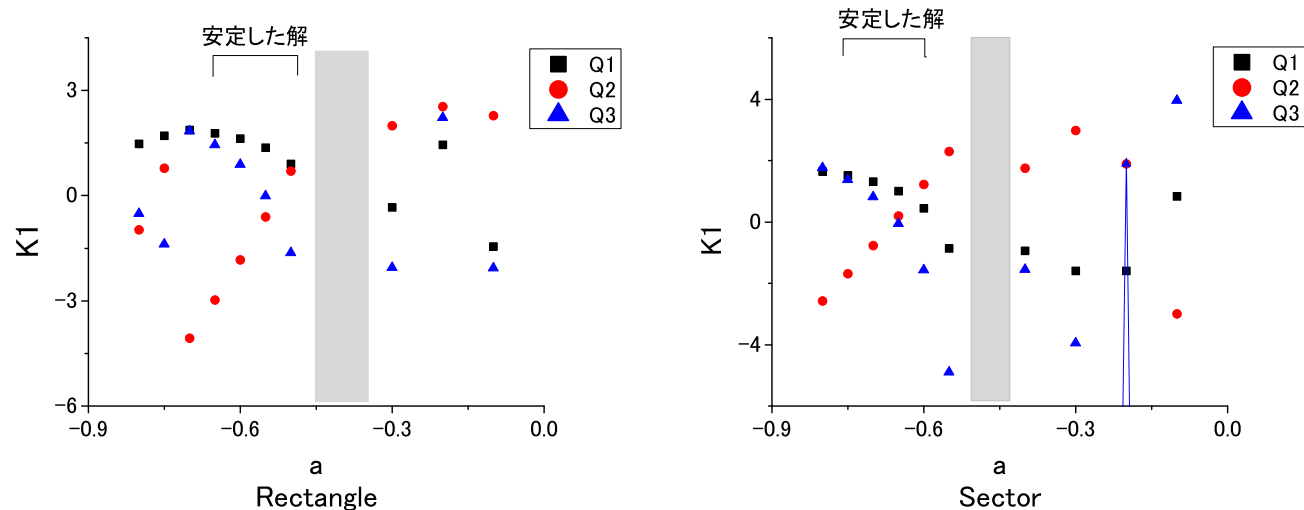


図: 4極電磁石のK1と転送行列のパラメータaの関係

結果

どちらのエッジでも $|K1| < 3$ で安定した解が見つかった。

rectangle では $-0.65 < a < -0.5$, sector では $-0.8 < a < -0.6$ で安定である。(K1 が小さく、誤差に強い。)

灰色の範囲では解が見つからなかった。

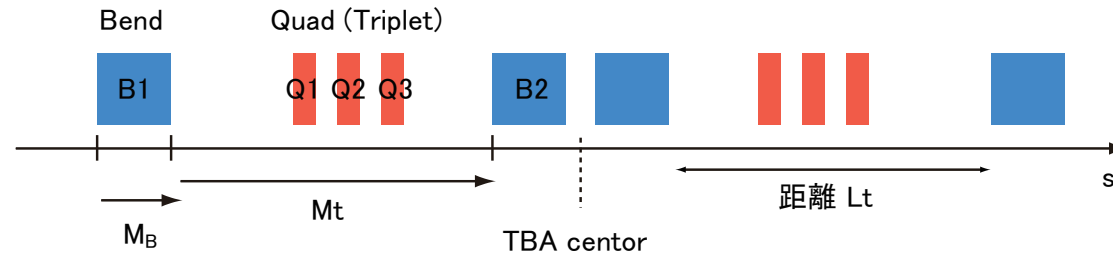
5GeV-ERLの曲率半径の検討

シンクロトロン放射光による励起エミッタンス $\Delta\varepsilon_x$ はベンドの曲率半径 ρ と twiss パラメータ β, α, γ に依存する。

$$\Delta\varepsilon_x = \frac{2r_e}{3} \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{m_e c} \gamma^5 I_5 \propto I_5,$$

$$I_5 = \int \frac{H}{|\rho|^3} ds \quad H = \beta(s)\eta'^2(s) + 2\alpha(s)\eta(s)\eta'(s) + \gamma(s)\eta^2(s)$$

TBAの場合 直線部の H/ρ^3 は無視できるので、ベンドのみを計算すればいい。



図：TBAのコンポーネント

$$\Delta\varepsilon \propto \int \frac{H}{\rho^3} ds = \int_0^{\theta_0} \frac{H_{B1}}{\rho^2} d\theta + \int_0^{\theta_0} \frac{H_{B2}}{\rho^2} d\theta, \quad s = \rho\theta \quad \theta_0 : \text{Bending angle}$$

分散関数の近似式

$\theta_0 \ll 1$ の場合について考える。

Optics が左右対称な場合の TBA center の分散関数はすでに求めた M_t を使うと以下のようなになる。

$$\eta_c = -\frac{2\rho(\theta_0 - \sin \theta_0)}{\sin \theta_0} \sim \frac{\rho\theta_0^2}{3}, \quad \eta'_c = 0$$

B1
$$\eta(s = \rho\theta) \sim \frac{\rho}{2}\theta^2, \quad \eta'(s = \rho\theta) \sim \theta$$

B2
$$\eta(s = L_t + \rho\theta_0 + \rho\theta) \sim \frac{\rho}{6}(3\theta^2 - 6\theta_0\theta + \theta_0^2)$$

$$\eta'(s = L_t + \rho\theta_0 + \rho\theta) \sim (\theta - \theta_0) - \frac{1}{6}(\theta^3 - 3\theta_0\theta^2 + \theta_0^2\theta + \theta_0^3)$$

η は ρ に比例し、 η' は ρ に依存しない。

ベータトロン関数の近似式

Optics が左右対称な場合の TBA center の Twiss パラメータ

$$\beta = \beta_c, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 1/\beta_c$$

バンド B1 と B2 の Twiss パラメータを転送行列 $M_{B1} = M_B^{-1} M_t^{-1} M_b^{-1}$ と $M_{B2} = M_B^{-1}$ から求める。

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_c \\ 0 \\ \gamma_c \end{pmatrix}$$

すでに求めた M_t を使って、 $\theta \ll 1$ の条件の下では、

$$M_{B1} = \begin{pmatrix} 2 + 3a - \frac{6\theta}{\theta_0}(a + 1) & -\frac{\rho\theta_0}{6}(13 + 15a) + \rho\theta(6 + 5a) \\ \frac{6}{\rho\theta_0}(a + 1) & -(6 + 5a) \end{pmatrix}$$

$$M_{B2} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho\theta \\ \theta/\rho & 1 \end{pmatrix}$$

ここから Twiss パラメータの近似式を求める。(結果は省略)

Hの導出

分散関数とベータトロン関数の近似式から I_5 を求める。 $\theta \ll 1$ の条件の下で近似を繰り返す。

$$I_5 = \int \frac{H_{B1}}{\rho^2} d\theta + \int \frac{H_{B2}}{\rho^2} d\theta \sim \frac{\theta_0^3}{\rho^2} f(a) \beta_c + \theta_0^5 g(a) \gamma_c$$

$f(a), g(a) : a$ の 2 次関数

★ ρ を大きくしたら、

- $\rho \rightarrow \infty$ としても $\theta_0^5 g(a) \gamma_c$ 以下にはならない。
- $\rho > \frac{\beta_c}{\theta_0} \sqrt{\frac{f(a)}{g(a)}}$ では ρ を大きくするメリットが少なくなる。

おおざっぱには $\rho > \frac{1}{\theta_0}$ となり、32セルの場合はおよそ 20m に相当。

★ θ_0 を小さく (セル数を大きく) したら、

- $\theta_0 \rightarrow 0$ の場合、 $\theta_0^3 \frac{\beta_c f(a)}{\rho^2}$ で小さくなる。

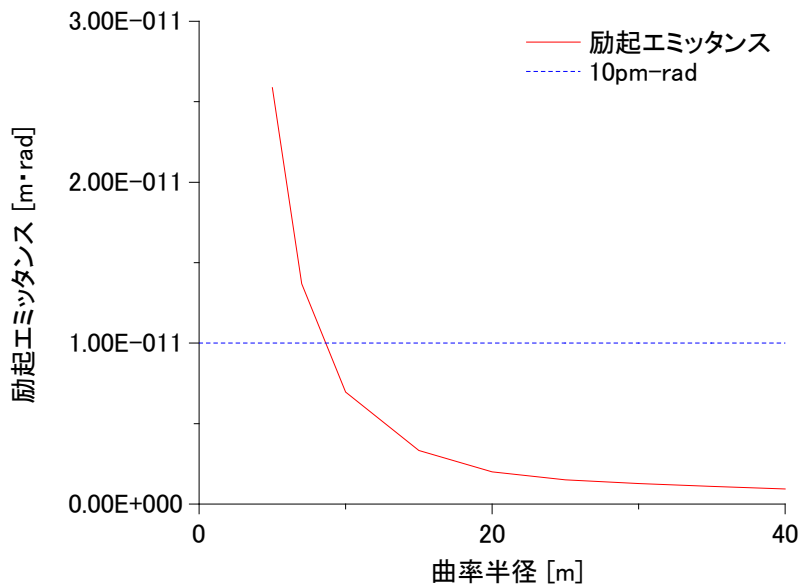
SADによる計算結果(9/1発表分+α)

- 計算条件

- 小林さんの5GeV-ERLのTBAを元にラティスを作成
- Bの長さだけを変更し、その他のQの大きさ、ドリフトの長さは変更無し。
- 左右対称、アイソクロナスかつアクロマットとする。

- 計算方法

1. OneTurnExcitation/.Emittance[OneTurnInformation->True]を実行して6x6のexcitation matrix Mを導出。
2. $M_{11} = \langle x^2 \rangle$, $M_{12} = \langle x x' \rangle$, $M_{21} = \langle x' x \rangle$, $M_{22} = \langle x'^2 \rangle$ と見なす。
3. $\text{Emittance} = [\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle \langle x' x \rangle]^{1/2}$ を計算。



- 結果

1. $\rho > 10\text{m}$ では励起エミッタンスは $10\text{pm}\cdot\text{rad}$ 以下である。
2. $\rho < 1/\theta_0 \sim 20\text{m}$ では励起エミッタンスにあまり変化が無く、一定値に近づく。
3. Elegantによると、 $\rho = 10\text{m}$ で規格化エミッタンスが、 $1.8\text{e-}7\text{ mrad}$ 。

- 結論

- 傾向は手計算通りだが、数値結果がelegantとSADで異なる。

左図：一周の励起エミッタンスと曲率半径の関係

励起エミッタンス $\Delta\varepsilon$ と周長の変化 1

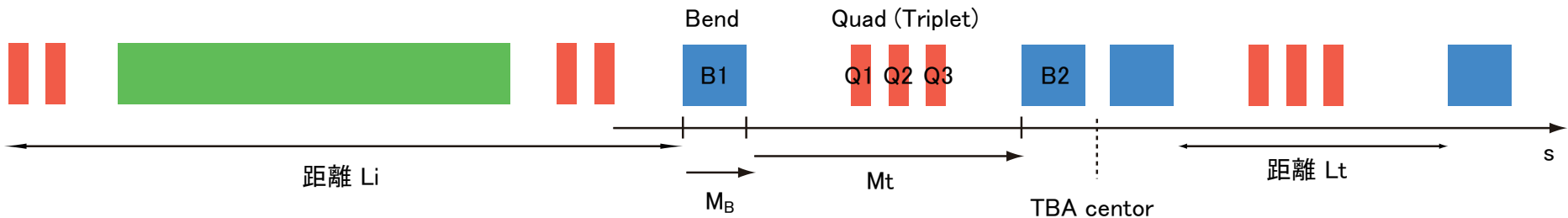
曲率半径 ρ を大きくすると、セル数を増やす (θ_0 を小さく) する方法ではどちらが有効か？

励起エミッタンス $\Delta\varepsilon$ を小さくすることによって伸びる周長 L_c

$$\frac{\partial L_c}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{\partial L_c}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \Delta\varepsilon} + \frac{\partial L_c}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial \Delta\varepsilon}$$

ρ や θ_0 の変化による全周長 L_c の変化

$$L_c = L_s \frac{2\pi}{4\theta_0}, \quad \frac{\partial L_c}{\partial \rho} = 2\pi, \quad \frac{\partial L_c}{\partial \theta_0} = -\frac{\pi L_s}{2\theta_0^2}$$



$L_s = L_i + 2 L_t = 1$, セルの長さ - ベンドの長さ

図：一つのセルのコンポーネント

励起エミッタンス $\Delta\varepsilon$ と周長の変化2

すでに導出した分散関数とベータトロン関数の近似式より、 $\Delta\varepsilon \propto I_5$ であることから、

$$\frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \rho} \propto -3 \left(\frac{\theta_0}{\rho} \right)^3 f(a) \beta_c, \quad \frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \theta_0} \propto \left(\frac{\theta_0}{\rho} \right)^2 \beta_c F(a) + \theta_0^4 \gamma_c G$$

$F(a)$: a の2次関数、 G :定数

ρ を大きくして $\Delta\varepsilon$ を抑えた場合 :

$$\frac{\partial L_c}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{\partial L_c}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \Delta\varepsilon} = -\frac{2\pi}{3} \left(\frac{\rho}{\theta_0} \right)^3 \frac{1}{f(a) \beta_c}$$

θ_0 を大きくして $\Delta\varepsilon$ を抑えた場合 :

$$\frac{\partial L_c}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{\partial L_c}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial \Delta\varepsilon} = -\frac{\pi L_s \rho^2}{2 \theta_0^4 \beta_c F(a) + \rho^2 \theta_0^2 \gamma_c G} \frac{1}{\theta_0^2}$$

$\rho \sim \theta_0^{-1}$ の場合

$$\frac{\partial L_c}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \Delta\varepsilon} \sim -\frac{2\pi}{3} \frac{1}{\beta_c f(a)} \frac{1}{\theta_0^6}, \quad \frac{\partial L_c}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial \Delta\varepsilon} \sim \frac{L_s \pi}{2} \frac{1}{\beta_c F(a) + \gamma_c G} \frac{1}{\theta_0^6}$$

上の2つの式を比べて判断することができる。