

空間電荷効果計算パラメタによる粒子分布の変化

宮島 司*

高エネルギー加速器研究機構

2012年4月18日

概要

cERL 第一コミッショニング (5 MeV, 7.7 pC/bunch) に向けた計算において、周回部点での受け渡し点において xy 空間での粒子分布が六角形状になっていることがわかった。この原因の調査のために、各要素毎の粒子分布を計算した。入射部空洞出口でコアからずれた粒子が位相空間上で観測され、合流部でも実空間分布が崩れることがわかった。また、空間電荷計算時の影響を調べるために、メッシュサイズ等のパラメタを変化させたときの粒子分布への影響を計算した。メッシュ幅を調整するパラメタを変えた場合には、分布の変化が見られるが、ある一定の大きさを取れば値が収束することが確認された。また、メッシュを囲む境界領域の大きさを決めるパラメタを変えた場合には、進行方向の物理量で明確な関係性が見出された。ただし、これらの空間電荷計算のパラメタが六角形分布を形成する原因ではないことが明らかになった。

1 はじめに

cERL の第一コミッショニングに向けた入射器ビームオプティクス計算において、合流部後の 8 台の四極電磁石の間隔を 0.1 m から、0.5 m に広げた場合、周回部との受け渡し点 (点 A) においてより小さいエミッタンス (0.361 mm mrad, nps = 100 k) が得られることが以前の計算で示されており [1]、この分布を用いた start-to-end(S2E) シミュレーションのための粒子分布を 100 k マクロ粒子に対して elegant 用の sdds フォーマットで生成した [2]。しかし、点 A における xy 空間での初期分布が六角形状になっていることが明らかとなった。

そこで、どの点において六角形分布が生成されているかを調べるための粒子トラッキング計算を行った。また、空間電荷効果の計算のためにメッシュ法を用いており、このメッシュの取り方によって分布が影響を受けることが考えられるため、メッシュの切り方を制御するパラメタを変えた時の粒子分布も計算した。

ここでは、前回求めたオプティクスを用いて、マクロ粒子数 100 k の場合について粒子トラッキング計算を行い、どの場所で分布が乱れ始めるかということと、空間電荷計算のメッシュパラメタによってどのように分布が変化するかを明らかにすることを目的とする。

2 合流部以降のレイアウト

粒子分布を生成するのに用いた合流部以降のレイアウトを図 1(間隔 0.5 m の配置) に示す。合流部後の四極電磁石の間隔は 0.5 m とした。

*tsukasa@post.kek.jp

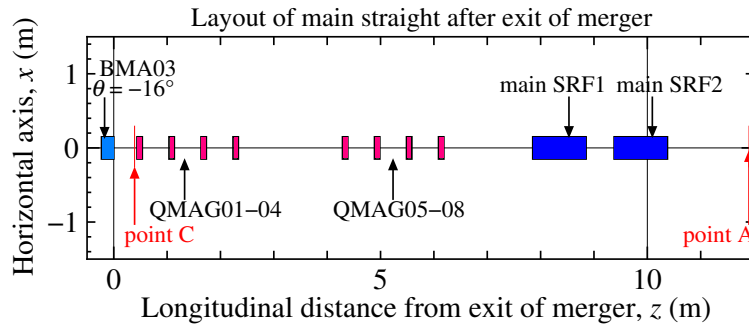


図 1: 合流部以降のレイアウト。4 極電磁石の間隔は 0.5 m。

3 各位置での粒子分布

まず初めに、各位置での粒子分布を計算した。計算には GPT を使用し、空間電荷効果の計算にはメッシュ法を用いた。マクロ粒子数は 100 k 個とし、ビームラインパラメータは [2] に示した値を用いた。粒子分布は、(a) ソレノイド 1 出口、(b) バンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B)、(e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C)、(g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A) の 8 か所について計算した。

3.1 xy 空間での粒子分布

図 2 に、実空間 (xy 面) 分布の時間発展を示す。図 2(d) に示すように、入射器空洞出口までは円筒対称性が保持されていることがわかる。その後、図 2(e) に示すように、四極電磁石を通過することで円筒対称性が崩れる。図 2(f) に示す合流部出口では、中心部の密度の高い領域と外周部の密度の低い領域に分かれている。合流部出口では基本的に分散関数はゼロなので、エネルギー差による軌道の差は残らないはずであるが、密度の高い部分でコアの部分から分布が水平方向に広がっているのが図 2(f) からわかる。その後ビームは 8 台の四極電磁石を通過する。そこでの分布を図 2(g) に示す。ここでは垂直方向にハローとなりそうな領域が形成されている。さらに主空洞通過後の図 2(h) では、六角形分布の形状となっている。

以上のように、 xy 空間での粒子分布を比較したところ、合流部以降で分布の崩れが見え始め、主空洞入口でコアから離れた粒子が見られ、主空洞出口では六角形分布になっていることが確認された。特に、主空洞出口では、(1) $x = 0$ 付近での垂直方向の拡がりりと、(2) $y = \pm 0.2$ mm 付近を中心とした水平方向の拡がりりが大きな特長となっている。これらの原因を調べるには、合流部出口以降での粒子分布の変化をより詳細に調べる必要があるので、これを次の課題とする。

3.2 位相空間での粒子分布

図 3 に各位置での水平方向位相空間分布 ($x - \beta_x$) を示す。ここで、 $\beta_x = v_x/c$ である。図 3(d) に示す入射器空洞出口での位相空間分布で、コア部分からのずれが見られる (時間分布を調べると、ずれた部分はビーム中心付近で発生している)。その後もコアからずれた粒子は位相空間上でコア部分に戻ることもなく残っていることがわかる。図 3(d) に示すように、主空洞出口では x 方向にコアから外れた部分があり、これが六角形分布の角に対応する部分となっている。

図 4 に各位置での垂直方向位相空間分布 ($y - \beta_y$) を示す。垂直方向での水平方向の場合と同様に、入射器空洞でコアからずれた粒子が形成され、それが下流まで残っていることがわかる。合

流部出口から下流では、ハロー部分が y 方向に引きのばされており、主空洞出口での位相空間分布でハローが大きな面積を占める原因となっている。

横方向位相空間分布では、入射器空洞出口からコア部分からはずれた粒子が形成されていることがわかる。入射器空洞下流ではそのハローがそのまま残っているように見える。次の課題としては、入射器空洞でどのようにコアから外れた粒子が形成されるかを調べるということがある。

図5に進行方向位相空間分布 ($t - \gamma$) を示す横軸はビーム中心からの時間差を表し、 $t < 0$ がバンチ前方、 $t > 0$ がバンチ後方を表す。進行方向位相空間分布では、ハローが形成されている様子はない。ただし、図5(h)に示すように、主空洞での加速がオンクレストから 1 ps くらいずれている。これは、GPT による計算で自動位相調整プログラムを使用しており、単粒子と計算結果と 1 ps くらい最大加速位相がずれていること示しており、調査が必要である。

3.3 時間方向分布

水平、垂直方向に形成されたハローがバンチのどの位置で生成されるかを示すために、図6に $t - x$ 分布、図7に $t - y$ 分布を示す。入射器空洞出口の (d) ではどの時刻にハローが生じているか明確ではないが、主空洞出口の (h) の場合には、水平方向ではバンチ中心付近で大きな振幅の粒子が存在しており、また垂直方向ではバンチの位置にあまり関係なく大きな振幅の粒子が存在していることがわかる。

3.4 ハローが形成される場所

ハローが形成される場所を調べるために、各位置での粒子分布を比較したところ、入射器空洞出口で位相空間上でコアから外れた粒子が形成され、それらの粒子がそのままコアから外れた状態を保持することがわかった。また、合流部出口では実空間分布分布の対称性の破れが観測され、主空洞で分布の崩れが大きくなることがわかった。六角形分布の原因はこれらの要素が合わさったものであると推測される。

次の課題としては、

- 入射器空洞のどこでコアから外れるか?
- 合流部での分布の崩れの原因
- 主空洞内での粒子分布の変化

を調べるということがある。これらについては今後調査を行っていく。

次に、空間電荷効果計算でのメッシュサイズやメッシュボックスサイズの大きさを変更したときの影響について評価した結果を示す。

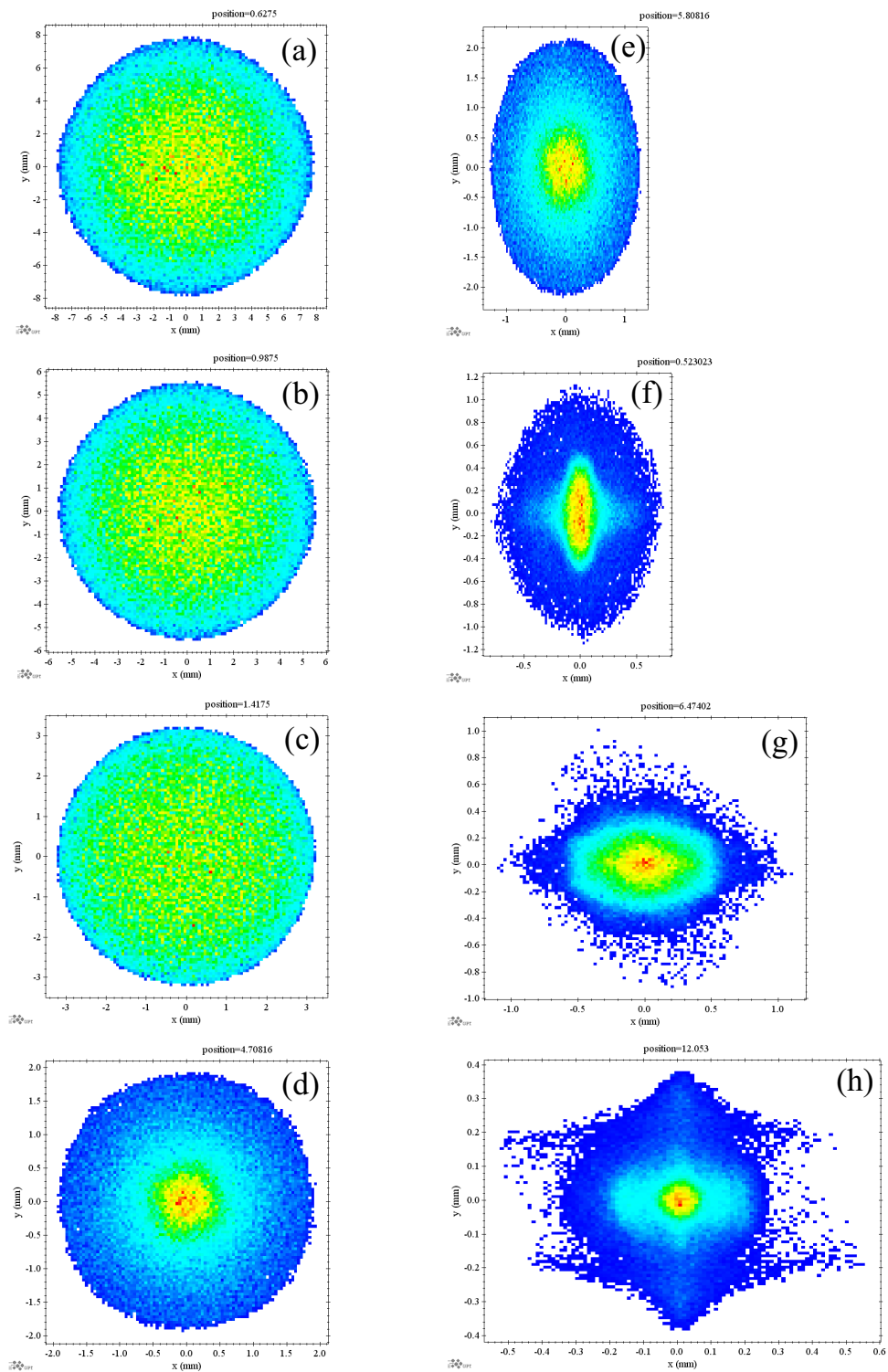


図 2: 実空間 (xy 面) 分布の時間発展。(a) ソレノイド 1 出口、(b) バンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B)、(e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C)、(g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A)。

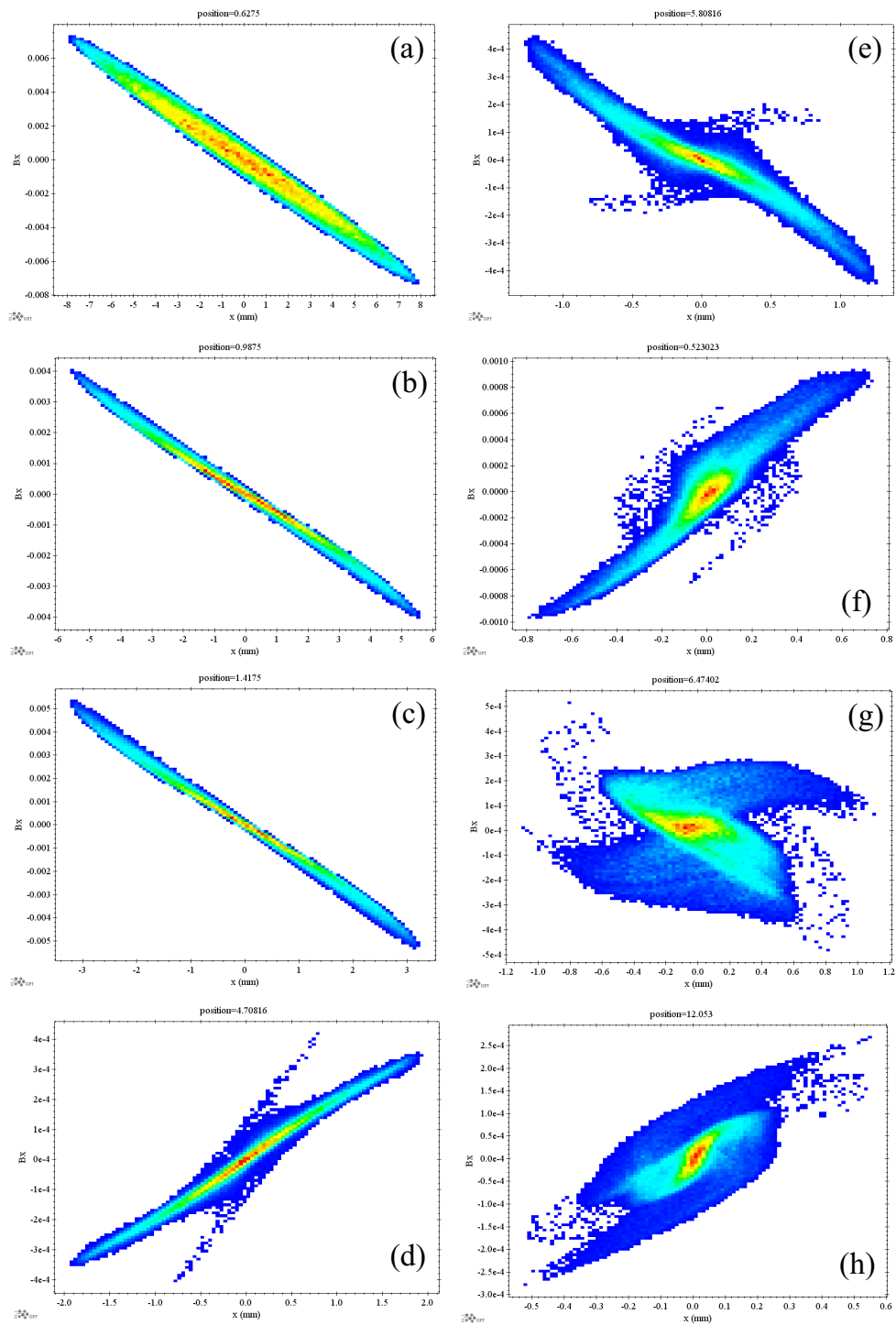


図 3: 水平方向位相空間分布の時間発展。(a) ソレノイド 1 出口、(b) バンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B) (e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C) (g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A)。

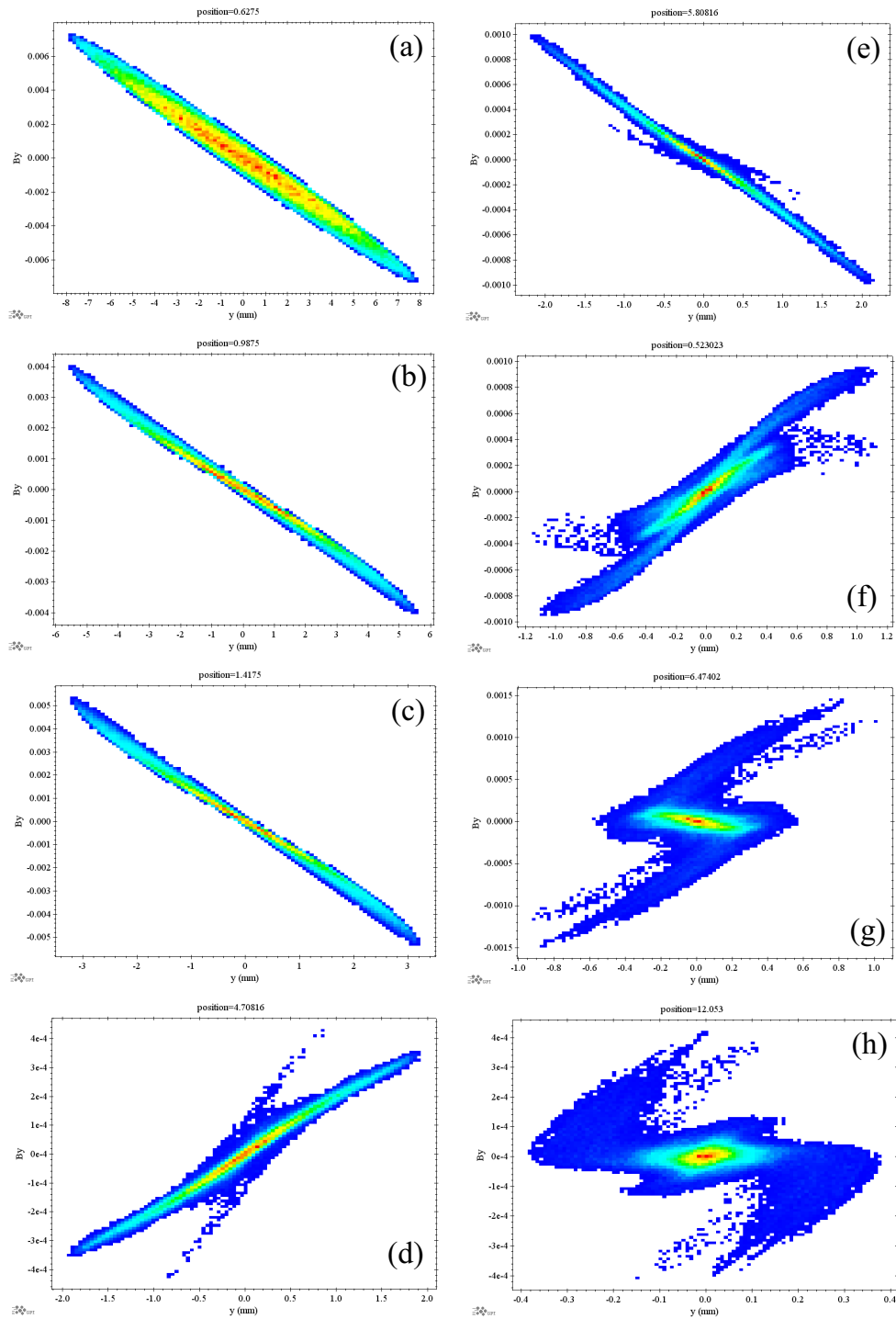


図 4: 垂直方向位相空間分布の時間発展。(a) ソレノイド 1 出口、(b) バンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B)、(e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C)、(g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A)。

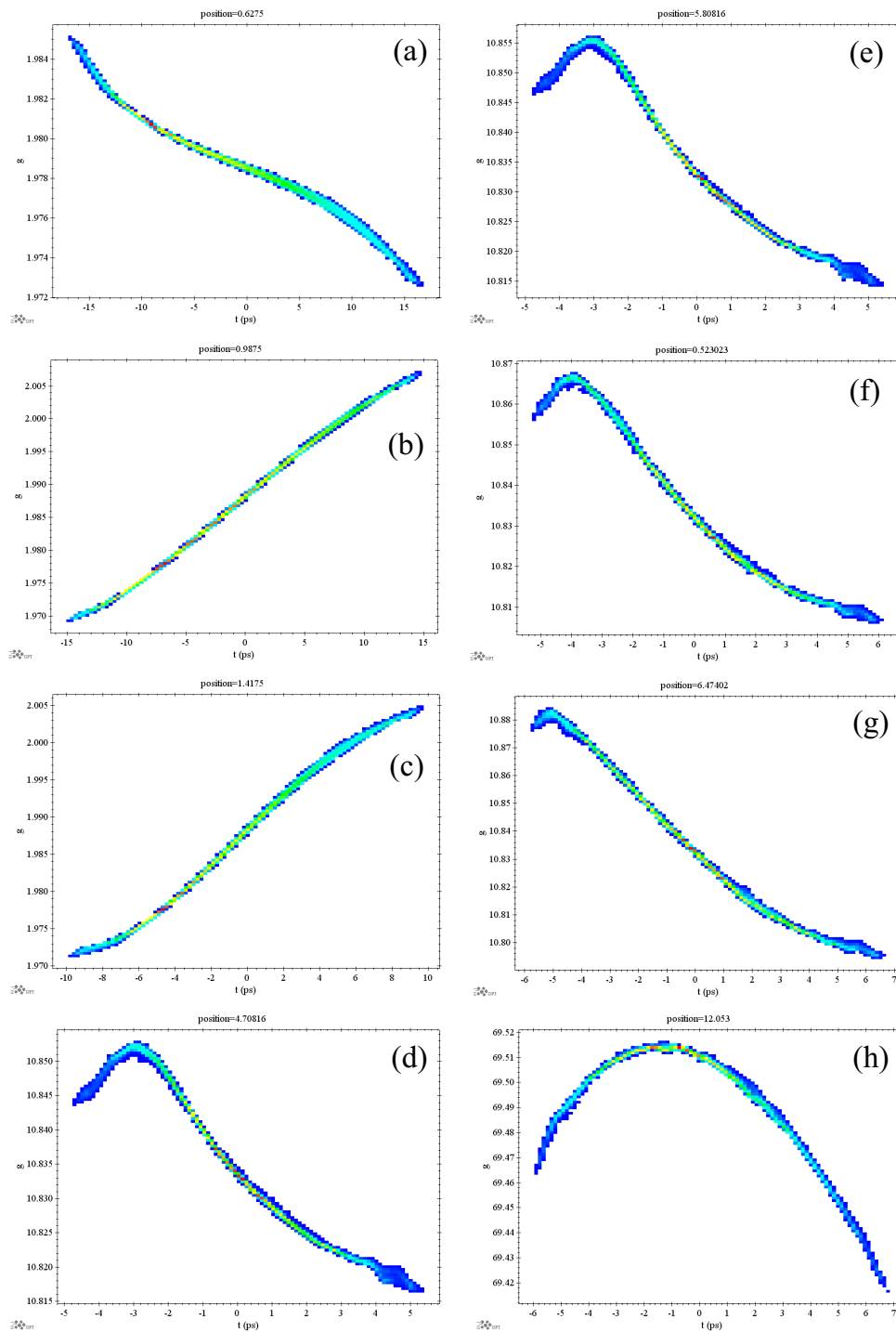


図 5: 進行方向方向位相空間分布の時間発展。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は γ を表す。(a) ソレノイド 1 出口、(b) バンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B)、(e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C)、(g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A)。

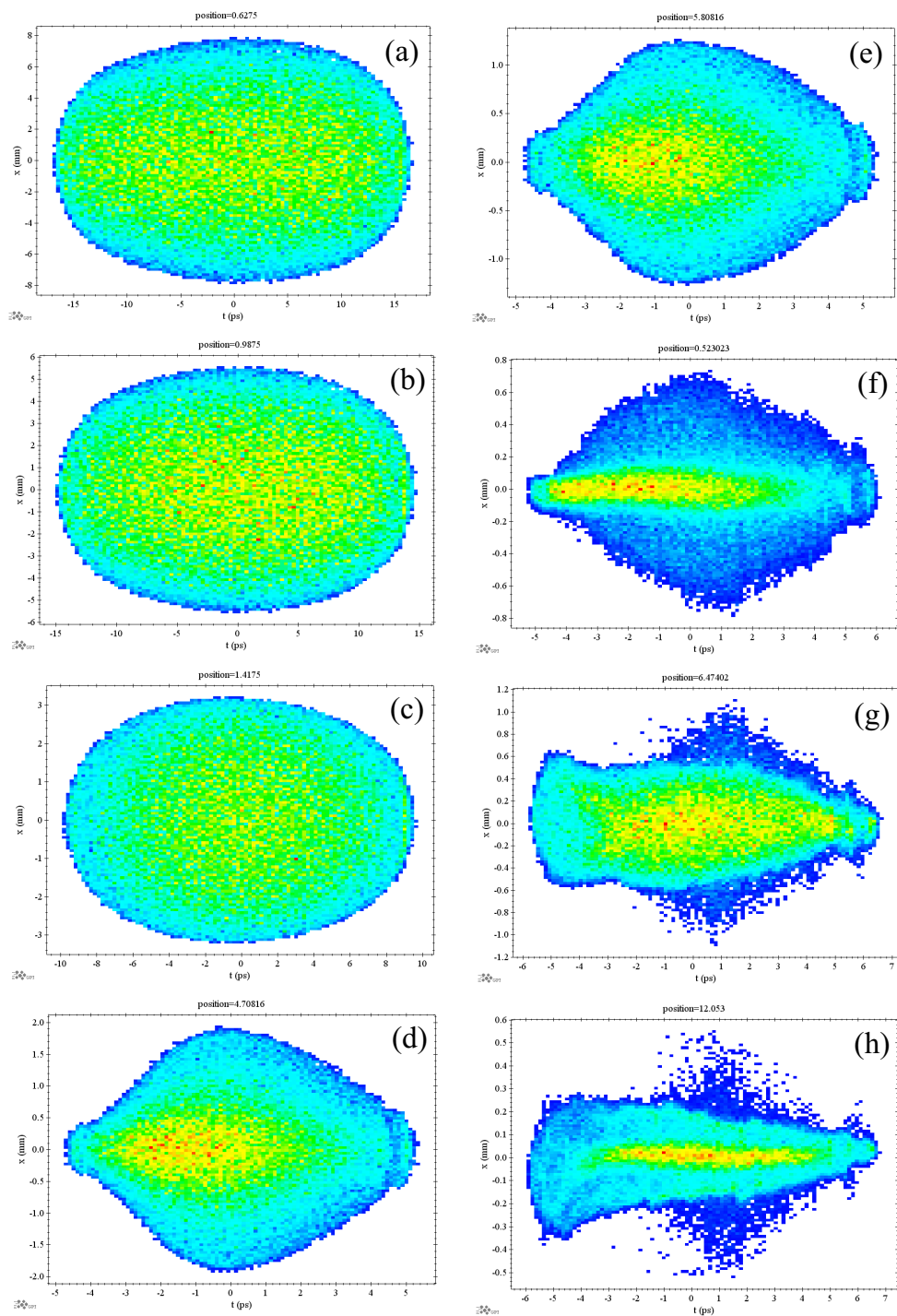


図 6: 時間方向 ($t-x$ 面) 分布の時間発展。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は x を表す。(a) ソレノイド 1 出口、(b) パンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B)、(e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C)、(g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A)。

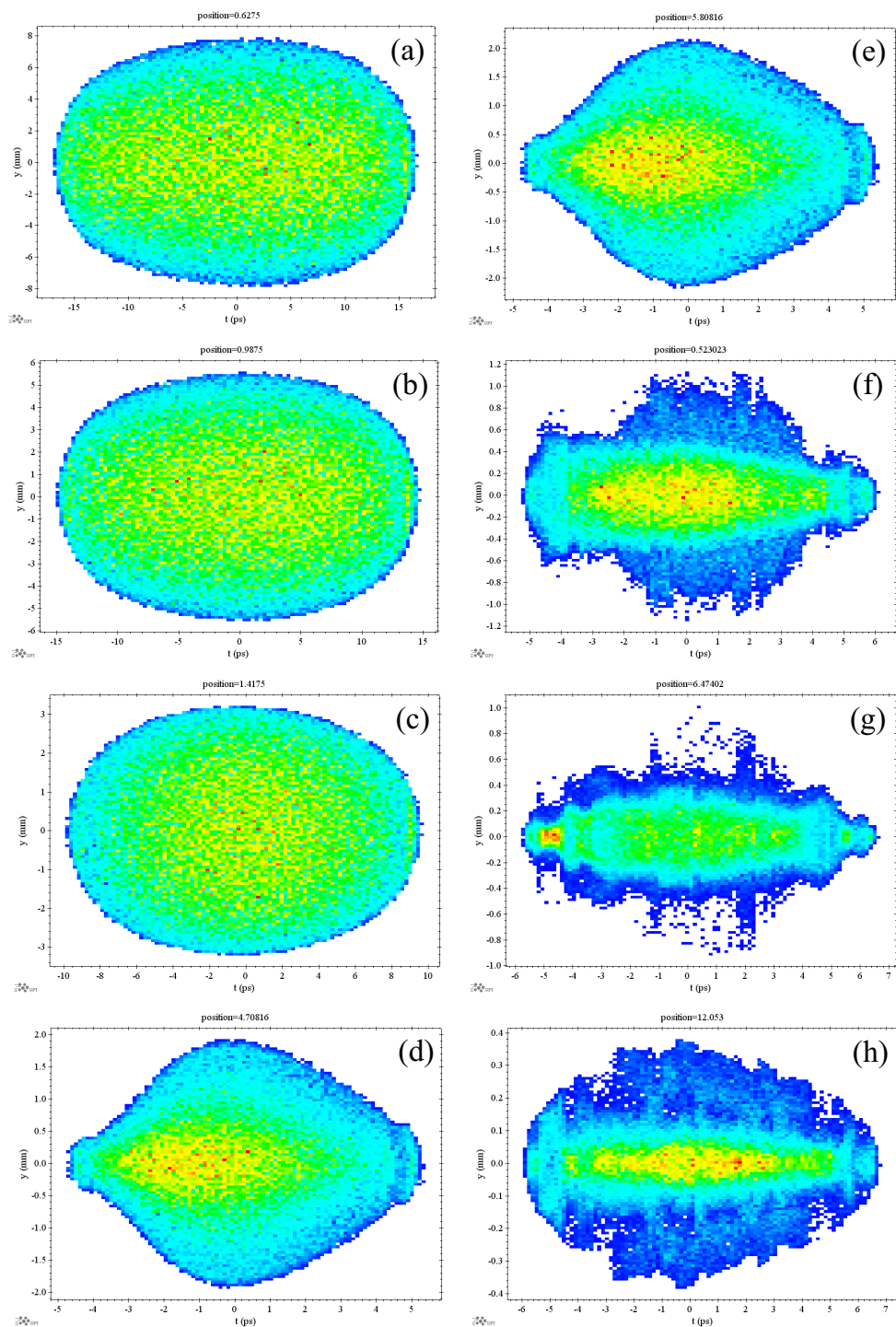


図 7: 時間方向 ($t-y$ 面) 分布の時間発展。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は y を表す。(a) ソレノイド 1 出口、(b) バンチャー空洞出口、(c) ソレノイド 2 出口、(d) 入射器空洞出口 (点 B)、(e) 合流部入口、(f) 合流部出口 (点 C)、(g) 主空洞入口、(h) 主空洞出口 (点 A)。

4 メッシュ法に基づく空間電荷計算による影響

GPT では主に二通りの空間電荷計算法が実装されており、一つ目が静止座標系での点電荷間のクーロン相互作用を計算する方法 (P2P 法)、二つ目が静止座標系での静電ポテンシャルをメッシュ法による計算する方法 (メッシュ法) である。P2P 法は単純であるが粒子数が増えると計算時間が大幅に増大するという短所があるため、通常はメッシュ法を用いている。ただし、メッシュ法ではバンチが静止して見える座標系があると仮定しているため、エネルギー拡がりが多い場合には誤差が大きくなる場合もある。また、静止系でのポアソン方程式を解くために、空間をメッシュに分けることになるが、その切り方によって結果が影響を受ける場合があるため、それらのパラメタを適用する対象に応じて正しく設定する必要がある。

ここでは、メッシュパラメタが変化したときの影響を調査し、それらによって六角形分布がどのような影響を受けるかを明らかにすることを目的とする。

4.1 メッシュ法でのパラメタ

GPT のメッシュ法”spacecharge3Dmesh”に基づく空間電荷計算では次に示すパラメタを調整することが可能である。

- ”MeshAdapt”, Fn, 隣あったメッシュの幅を調整するパラメタ (Default 0.5)
- ”MeshBoxSize”, Nstd, メッシュを生成する境界領域の大きさの最小値を制限するパラメタ (Default 5)
- ”MeshNfac”, Alpha, メッシュ数を決めるパラメタ (Default 1)
- ”MeshNpow”, mpow, 1 方向のメッシュ数と粒子数の関係を決めるパラメタ (Default 1/3)

この他にも調整可能なパラメタがあるが、空間メッシュに関する主なものは上記のパラメタとなる。メッシュ法による空間電荷計算では、バンチを一度静止系に Lorentz 変換し、そこでポアソン方程式を解いて静電場を求め、逆 Lorentz 変換することで、実験室系での電磁場を求めている。静止系でのポアソン方程式を解く際に、電場を求める領域の箱 (境界領域) を定めている。この箱の大きさを制御するのが、”MeshBoxSize”, Nstd パラメタである。Nstd パラメタは箱の一辺の大きさの最小値を定めるパラメタであり、

$$(\text{それぞれの方向の } rms \text{ サイズ}) \times Nstd = (\text{箱の一辺の幅の最小値}) \quad (1)$$

となる。初期設定では $Nstd = 5$ となっており、一様円形分布の場合には分布全体が領域に含まれることになる。また、分布が一様な状態から崩れた場合にもバンチ全体が入るように箱の幅は調整される。Nstd を大きくとることによって、箱の最小幅を制限することができるが、あまり大きくしすぎるとメッシュ数を増加させないとメッシュ幅が広がってしまい、微細な情報が平均化されることになるので、通常は初期設定の 5 で問題ない。

また、境界領域の大きさに他に重要なパラメタがメッシュ数である。”spacecharge3Dmesh”では一辺あたりのメッシュ数は

$$N_x = N_y = N_z = \alpha \times N_p^{mpow} \quad (2)$$

で決められる。ここで、 N_p はマクロ粒子数を表す。初期設定では、 $N_x N_y N_z = N_p$ となり、平均すると 1 セルに 1 個のマクロ粒子が入ることになる。

境界領域の大きさとメッシュ数によって、基本的なメッシュ幅が決まることになるが、“spacecharge3Dmesh”ではメッシュ幅が電荷密度に応じて可変となるように設定される。これを制御するパラメタが、“MeshAdapt”, F_n である。 F_n の影響を示したのが、図 8 である。電荷密度の高い領域ではメッシュ幅を狭くし、低い領域では幅を広くして計算精度と速度の向上を図っている。 F_n は隣り合ったメッシュ幅の最大可変率を規定しており、このパラメタの調整によってメッシュ間隔を変えることができる。ただし、条件によってはポアソン方程式の解が収束せずにエラーを出すことがあり、 F_n を調整する必要がある。通常は初期設定値の $F_n = 5$ で問題ないが、収束の問題が発生する場合には、この値をゼロに近付けていく。 $F_n = 0$ の場合には完全に等間隔メッシュとなり収束の問題はなくなるが、密度の高い領域での空間分解能が悪くなる。

以上のように、“spacecharge3Dmesh”では複数のパラメタによって空間電荷による電場を計算する際のメッシュを調整することができる。ここでは、メッシュ幅を調整するパラメタ F_n と、境界領域の最小値を決める N_{std} を調整したときの影響を計算する。

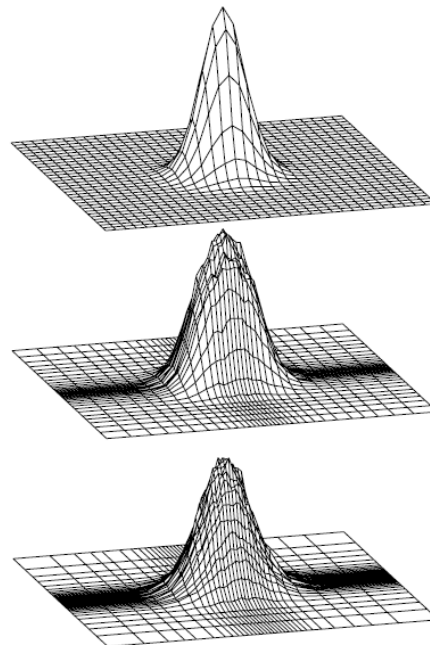


Figure 4-6: xy -meshline positions for a gaussian charge density with $fn=0$ (top), $fn=0.2$ (middle) and $fn=0.5$ (bottom), with a bounding box of 5σ . The vertical axis shows the total charge in each meshbox, where the height of the top has been normalized in all plots individually.

図 8: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えたときのメッシュ幅の変化 [3]。 $F_n = 0$ の場合に等間隔メッシュとなる。

4.2 メッシュ幅調整パラメタ F_n の影響

ここでは、メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の影響を調べる。計算では、 F_n のみを変化させて、その他の空間電荷計算パラメタは変化させないものとする。この条件の下で、主空洞出口 (A 点) での粒子分布の影響を調べる。

図 9 に実空間 xy 分布を示す。 $F_n = 0.0$ の場合に顕著な違いが見えているが、 F_n が 0.1 より大きい場合にはそれほど大きな変化は見られていない。 $F_n = 0.0$ の場合には他の場合と比べて、外

周部の分布だけでなく、コアの中心部の分布でも違いが見えている。これは、 $F_n = 0.0$ の場合には完全等間隔メッシュとなり、電荷密度の高い領域でもメッシュ幅が大きくなり、空間電荷力の影響が平均化されていることによると推測される。また、 $F_n = 0.0$ の場合で六角形分布を形成する外周部分での分布が生じており、メッシュ調整パラメタが原因となっている訳ではなさそうである。 $F_n \neq 0.0$ の場合には、この外周部の分布がより強調されているように見える。図 10 に時間方向分布を示す。縦軸はビームの進行方向軸からの横方向のずれ r_{xy} を表している。横方向で大きな振幅をもつ部分は、バンチ中心付近の密度の高い領域で起きていることがわかる。 $F_n = 0.0$ の場合には、中心付近のメッシュが他の場合と比べて粗いために、これらの大振幅をもつ部分が少なくなっていると推測される。

図 11 に水平方向位相空間分布を示す。実空間の場合と同様に、 $F_n = 0.0$ の場合に顕著な違いが見られている。分布の差は外周部分だけでなく、中心付近でも見られている。垂直方向位相空間分布を図 12 に示すが、こちらの場合も同様で、 $F_n = 0.0$ のときに違いが大きい。ただし、外周部の分布については、 $F_n = 0.2$ の時により外側まで分布している。図 13 に進行方向位相空間分布を示す。進行方向位相空間分布では F_n の大きさに関わらず、ほぼ同じ分布をしている。これらのことより、 F_n の影響は横（水平、垂直）方向に顕著に現れることが分かる。この時の F_n とそれぞれの方向の規格化エミッタンスの関係を図 14 に示す。 $F_n \leq 0.3$ の場合には、ほぼ値が収束していることがわかる。図 15 にビームサイズの変化を示す。規格化エミッタンスの場合と同様に $F_n \leq 0.3$ の場合に値が収束している。ただし、バンチ長のみ同方向に変化しているように見える。全エネルギーとエネルギー拡がりの変化を図 16 に示す。エネルギーとエネルギー拡がりは、 $F_n \leq 0.1$ でほぼ収束しているように見える。これより、 $F_n \leq 0.3$ としておけば、横方向の値もある程度収束するといえる。ただし、真の値に収束しているかは、等間隔メッシュの場合でメッシュ数を増やしてメッシュ間隔を十分小さくしたときの計算結果と一致していることを確認しなければならない。逆に言うと、エミッタンス等の計算精度はこの程度であるということを見積もったことになる。

これらをまとめると、メッシュ幅調整パラメタによって横方向分布は影響を受けるが、 F_n をある程度大きくとっておけば値はほぼ収束することが分かった。また、進行方向分布への影響は横方向に比べると小さいということが分かった。以上のことより、当面は初期設定値の $F_n = 0.5$ で計算するので問題ないということが言える。

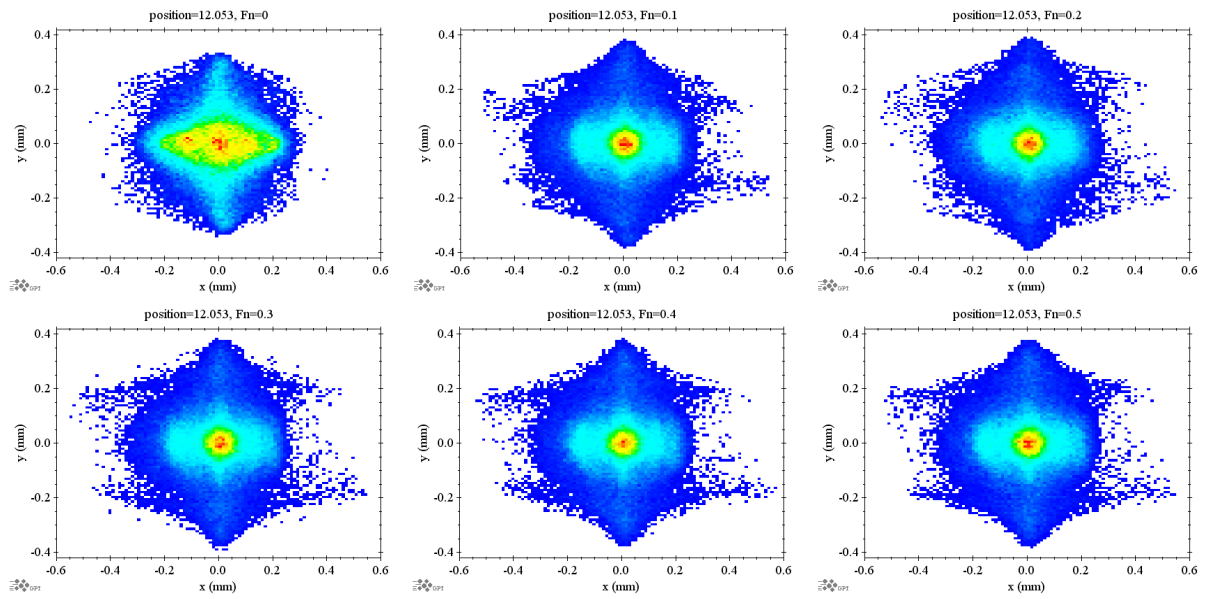


図 9: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた実空間分布。横軸は x 軸、縦軸は y 軸を表す。

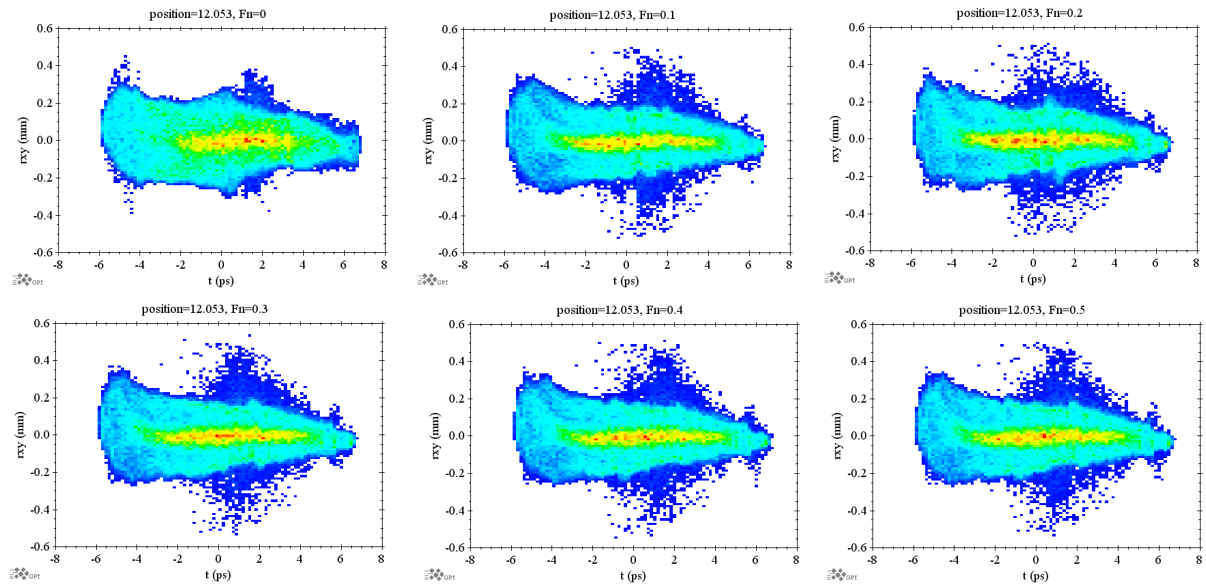


図 10: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の時間方向分布。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は z 軸からの距離 r_{xy} を表す。

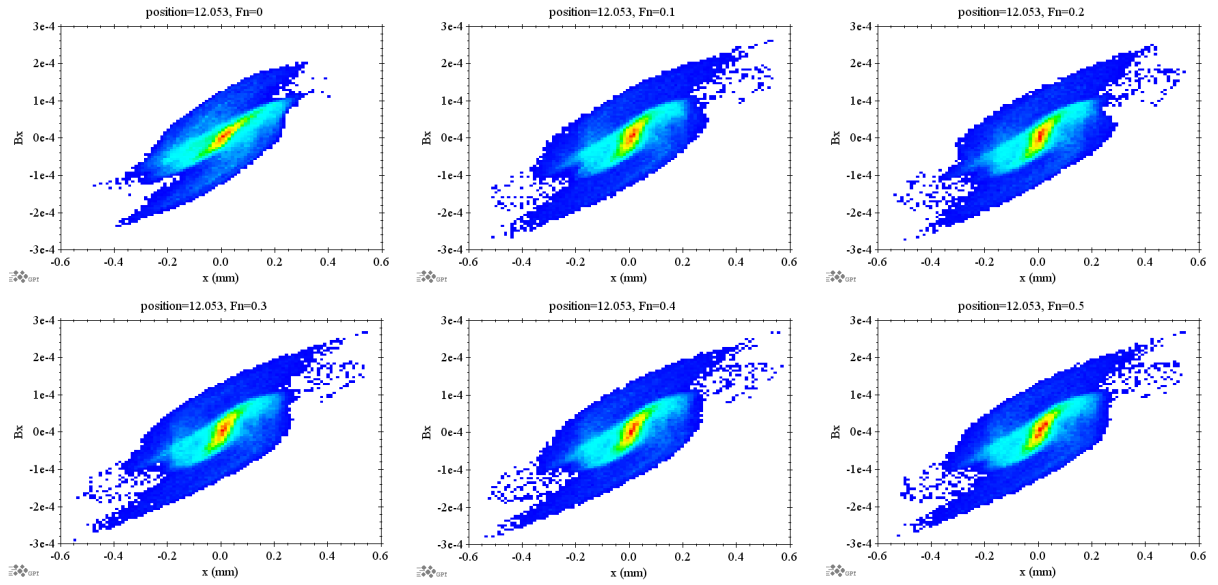


図 11: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の水平方向位相空間分布。横軸は x 軸、縦軸は β_x を表す。

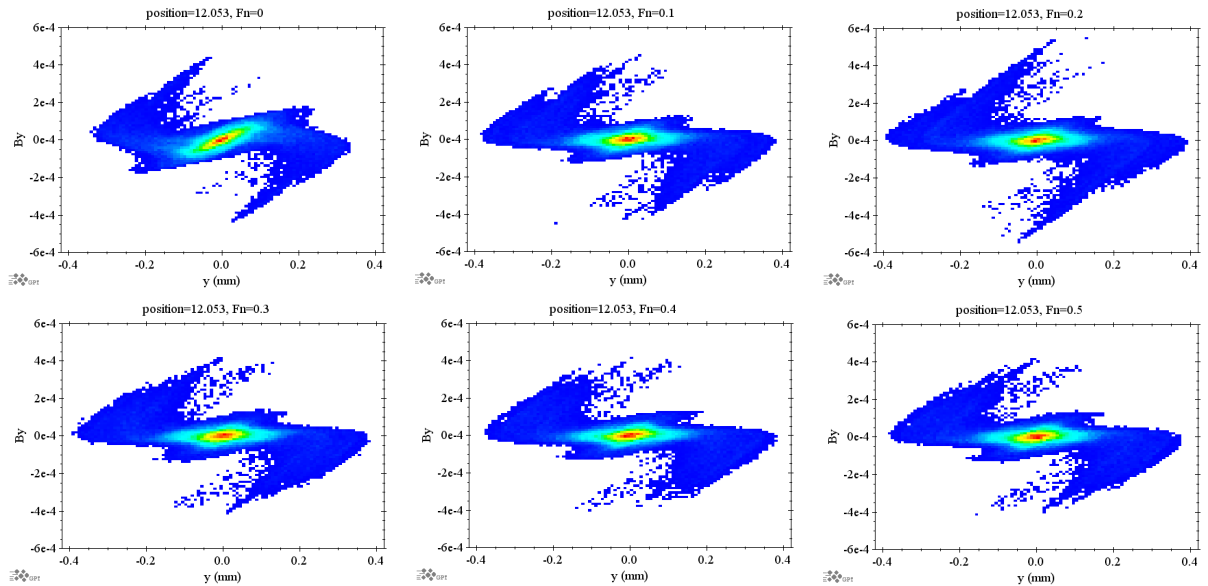


図 12: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の垂直方向位相空間分布。横軸は y 軸、縦軸は β_y を表す。

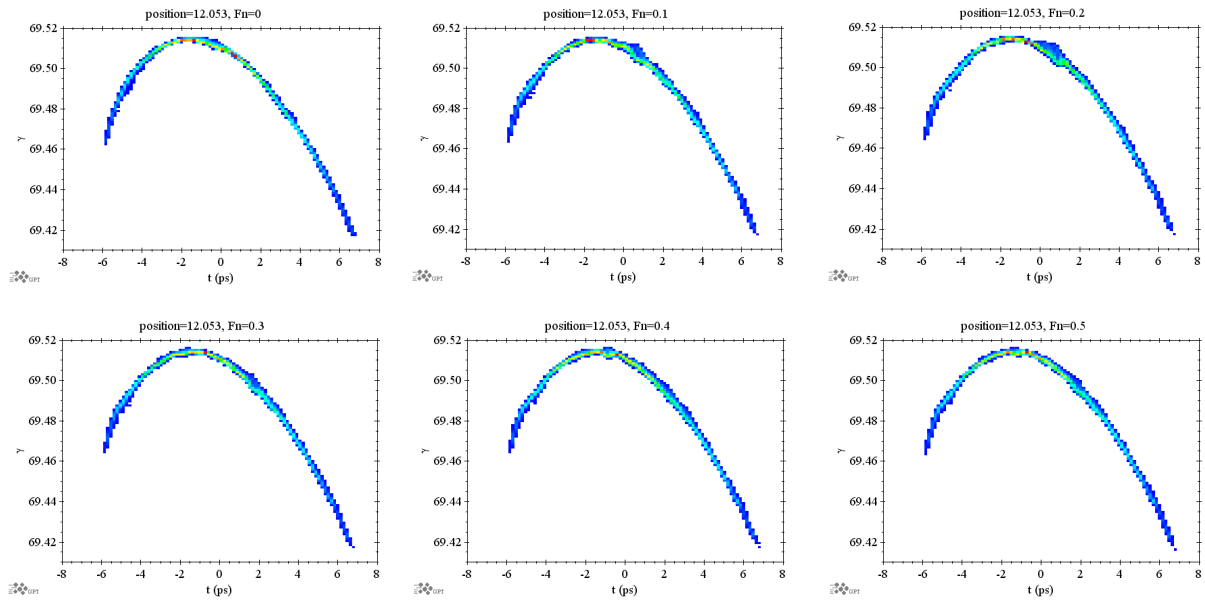


図 13: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の進行方向位相空間分布。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は γ を表す。

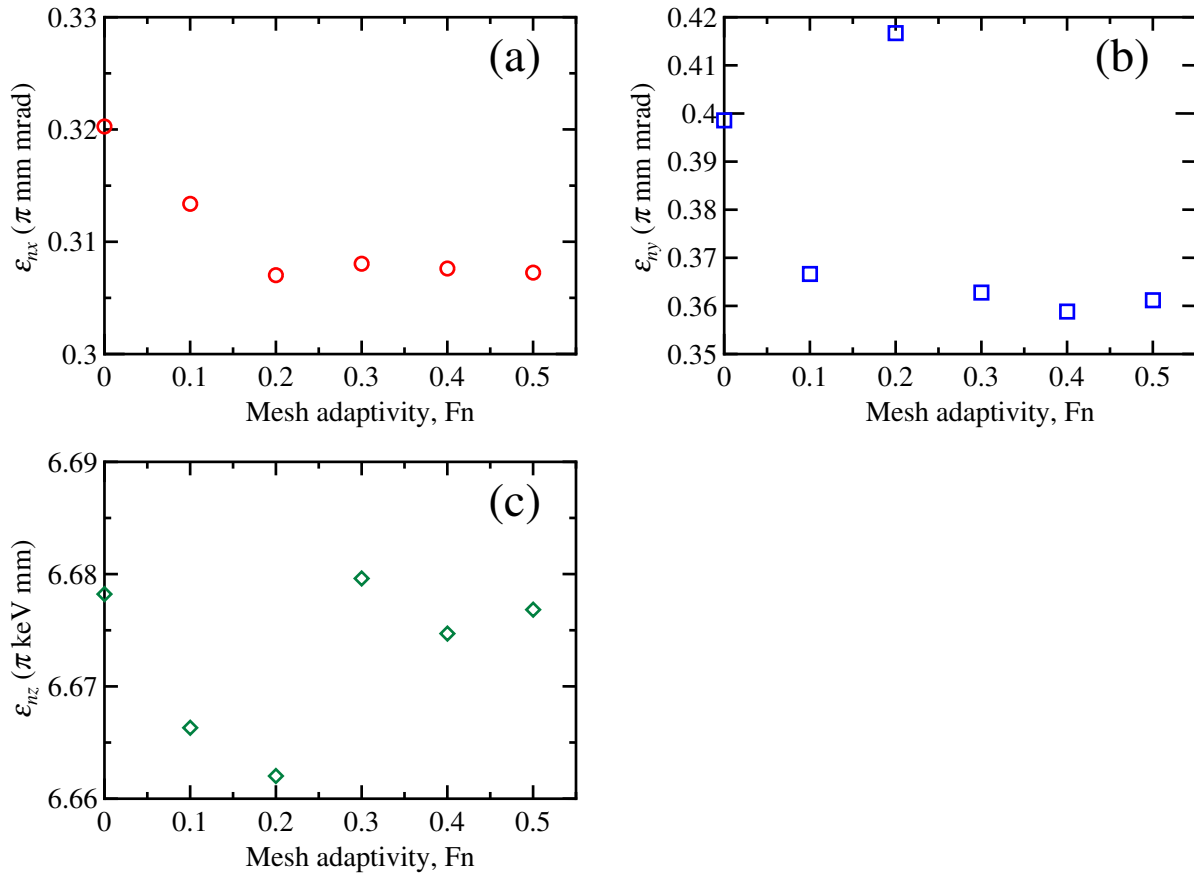


図 14: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の規格化エミッタンスの変化。

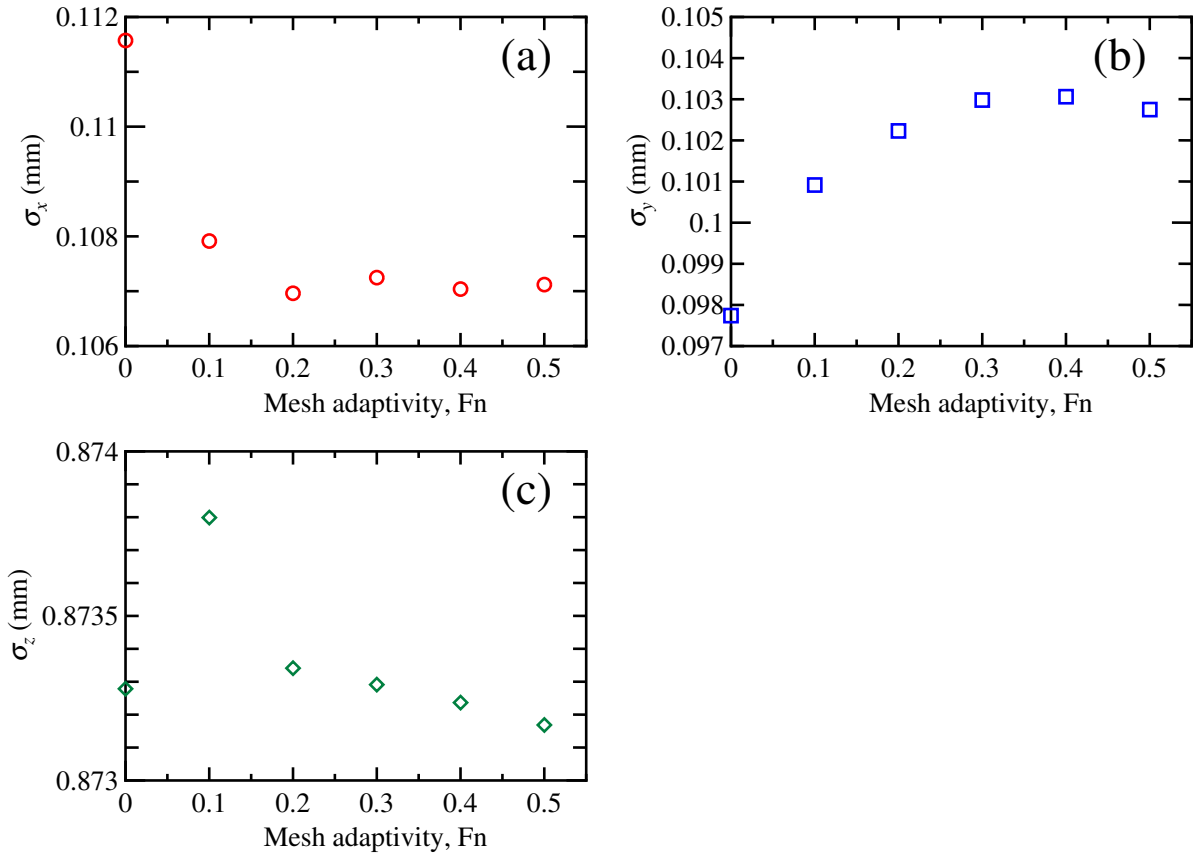


図 15: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時のビームサイズ、バンチ長の変化。

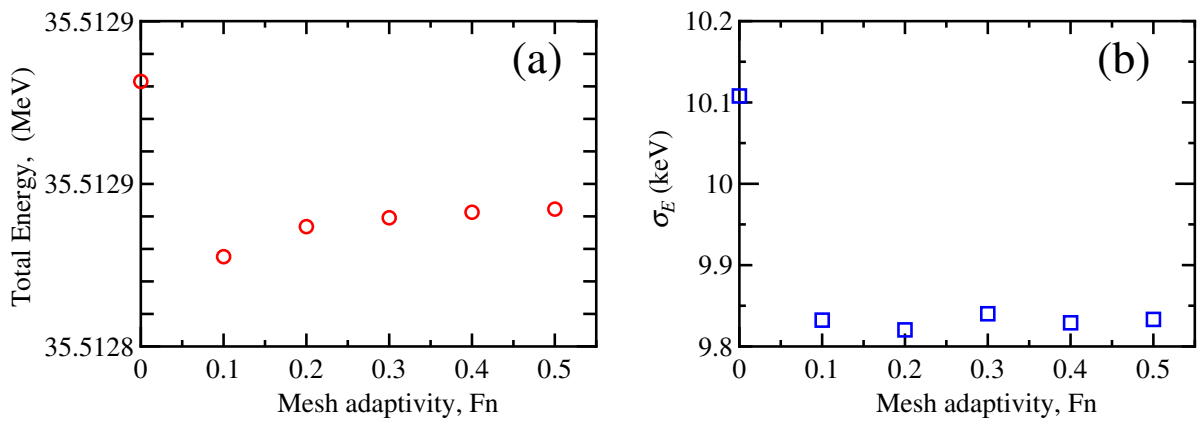


図 16: メッシュ幅調整パラメタ F_n を変えた時の全エネルギー、エネルギー拡がりの変化。

4.3 境界領域サイズ Nstd の影響

ここでは、境界領域サイズ調整パラメタ Nstd を変えた時の影響を調べる。繰り返しになるが、Nstd は静止系での静電場を計算する際に設定する境界領域の大きさの最小値を定めるものであり、メッシュ数が固定の場合には、メッシュ幅を調整するパラメタとなる。このパラメタの影響が顕著に現れるのが、分布が一様分布に近い場合であり、その際には、メッシュ幅は Nstd を大きくすると、メッシュ幅が広がるということになる。一様分布から離れている場合には、境界領域はバンチ全体が入るように拡張されるため、大きな変化は見られないはずである。言い換えると、電子銃近傍では分布が一様分布に近いためにこの影響が顕著に現れることになる。ここでの計算では、電子銃からかなり離れた位置まで計算しており、上流での影響が下流でどのような影響を与えているのを見るということになる。

図 17 に実空間分布、図 18 に時間方向分布を示す。どちらの分布でも、Nstd を変えた時の影響は明らかには見えていない。図 19, 図 20, 図 21 に水平方向、垂直方向、進行方向の位相空間分布を示すが、実空間の場合と同様に影響はほとんど見えていない。図 22 に規格化エミッタンスの変化を示す。数値でみると、Nstd を変えたことによってそれぞれ値が変化していることがわかるが、何らかの明らかな関係性があるとは言い辛い。同様に、図 23 にビームサイズとバンチ長の変化、図 24 に全エネルギーとエネルギー拡がりの変化を示すが、横方向の物理量に関しては明らかな関係性は見いだせない。しかしながら、バンチ長と全エネルギーについては単調増加あるいは単調減少となっている。進行方向空間電荷力によってこれらの単調な変化が生じているものと推測される。電子銃近傍で同様の計算を行うことにより、進行方向空間電荷力と境界領域の大きさの関係を明らかにできると思われるので、今後調査する。

以上のことより、境界領域サイズのパラメタ Nstd については、横方向の物理量については明確な関係が見えていないが、エネルギーやバンチ長などの進行方向の物理量には明らかな関係が見えている。また、今回問題としている六角形分布については Nstd は大きな影響を与えていないということが明らかとなった。

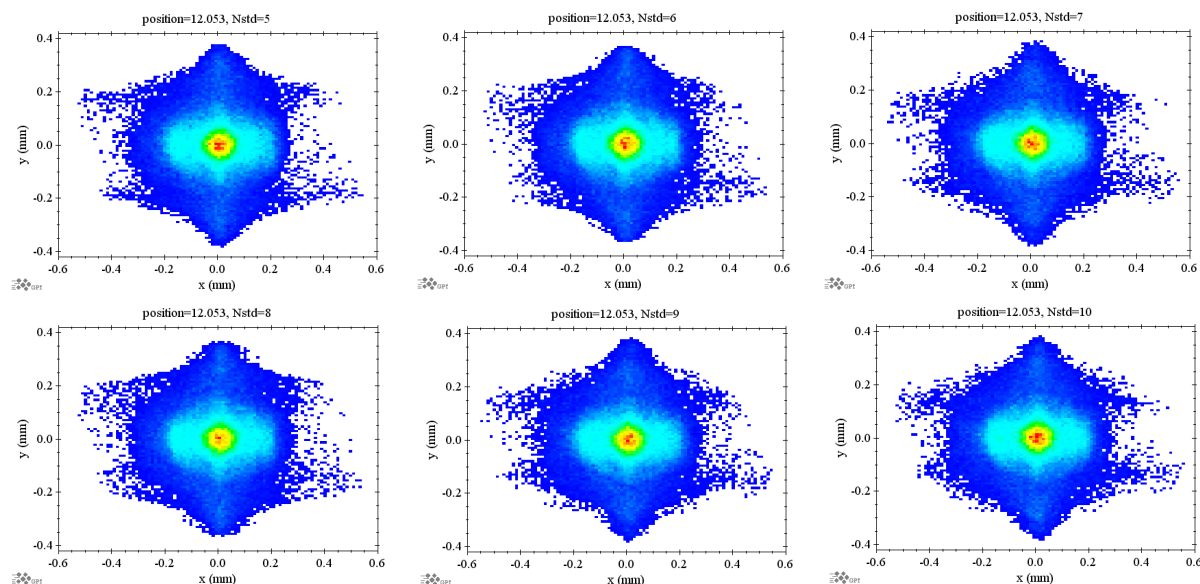


図 17: 境界領域サイズ Nstd を変えた実空間分布。横軸は x 軸、縦軸は y 軸を表す。

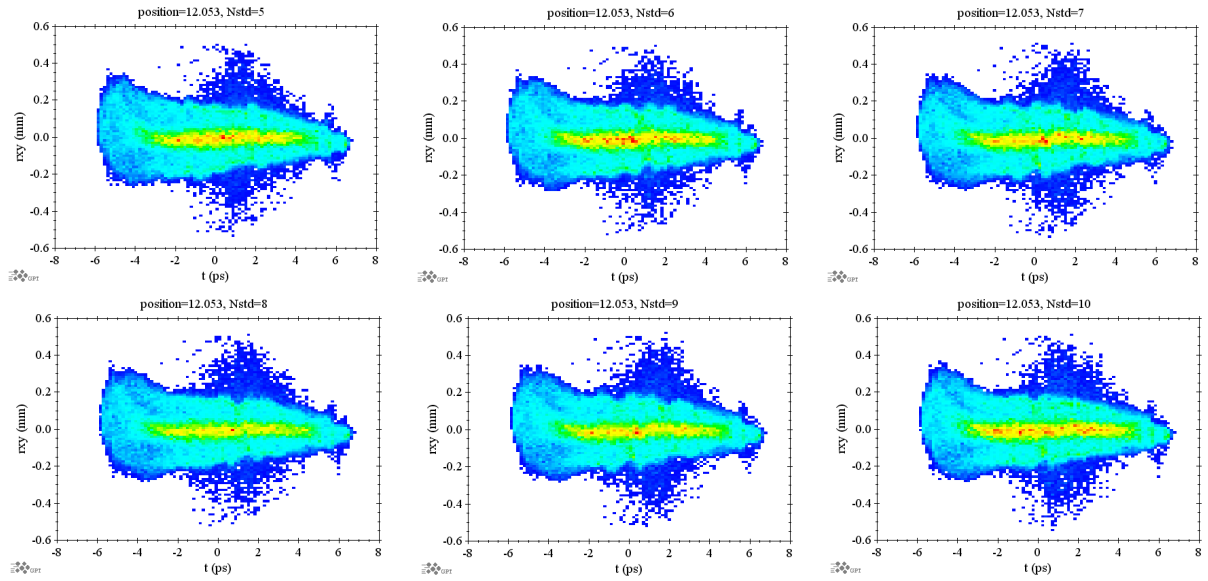


図 18: 境界領域サイズ N_{std} を変えた時の時間方向分布。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は z 軸からの距離 r_{xy} を表す。

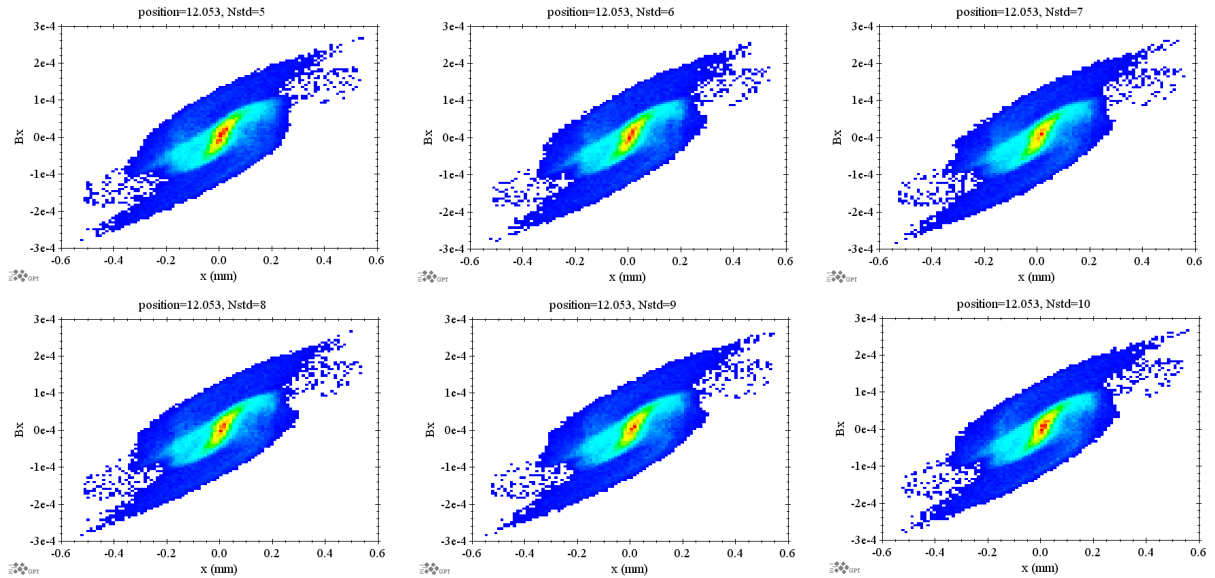


図 19: 境界領域サイズ N_{std} を変えた時の水平方向位相空間分布。横軸は x 軸、縦軸は β_x を表す。

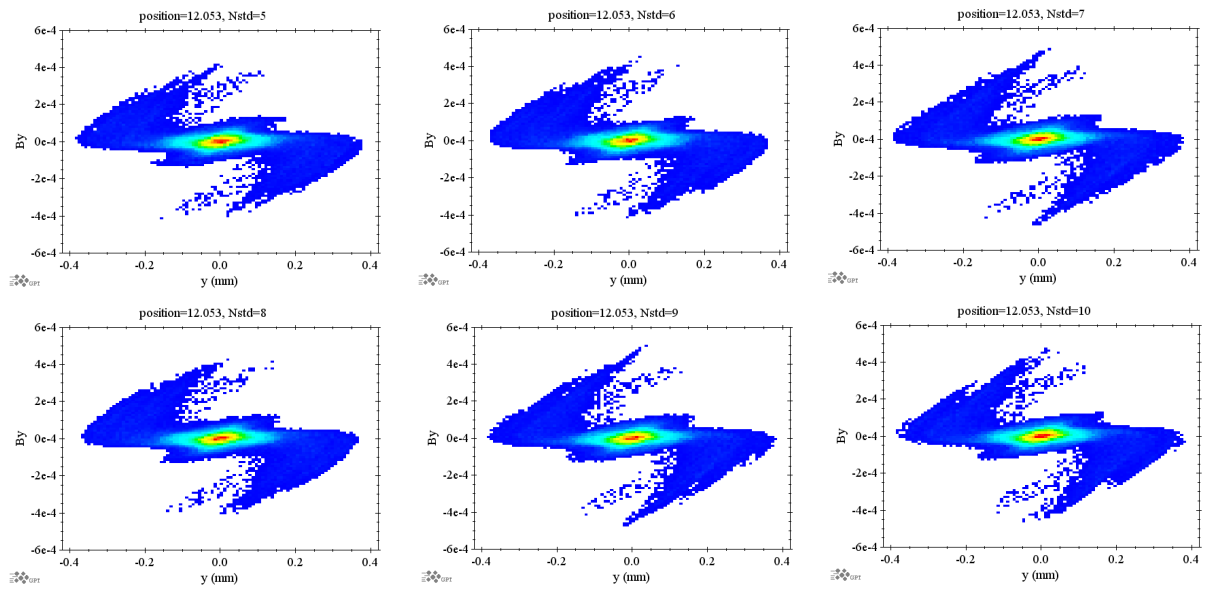


図 20: 境界領域サイズ N_{std} を変えた時の垂直方向位相空間分布。横軸は y 軸、縦軸は β_y を表す。

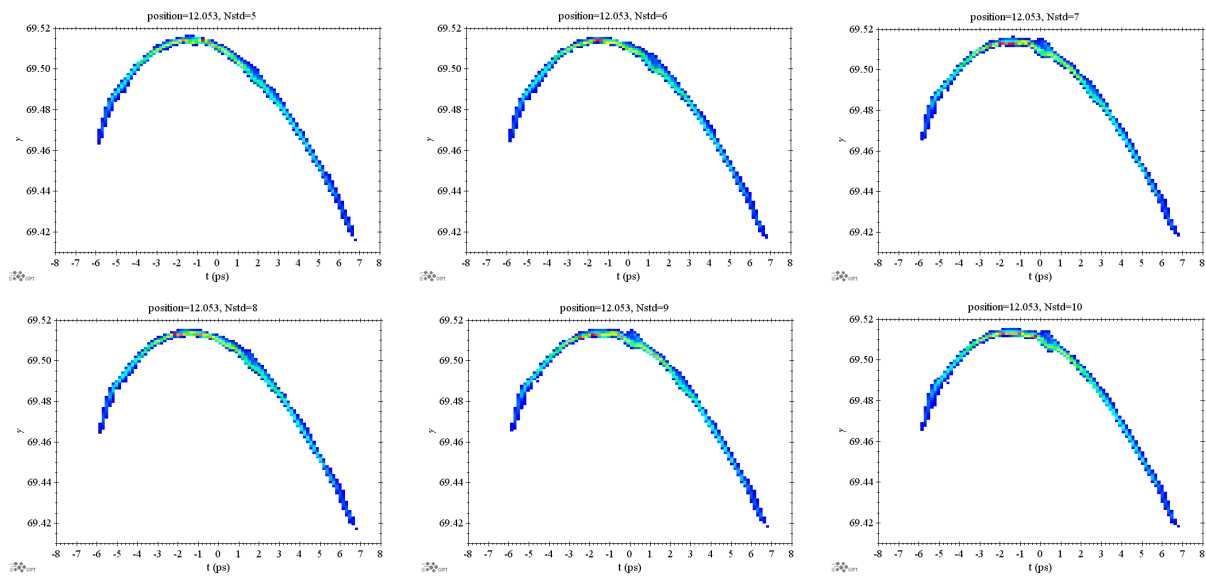


図 21: 境界領域サイズ N_{std} を変えた時の進行方向位相空間分布。横軸はビーム中心からの時間差、縦軸は γ を表す。

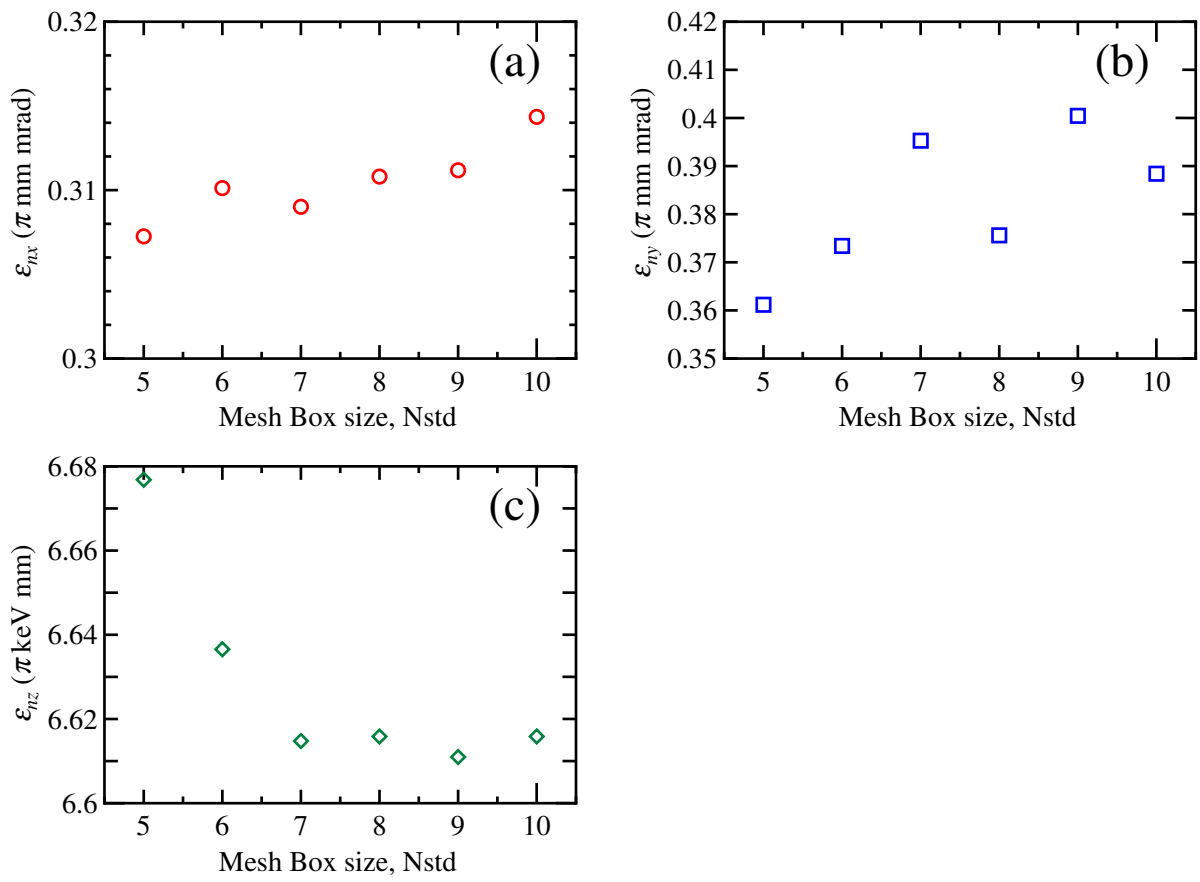


図 22: 境界領域サイズ Nstd を変えた時の規格化エミッタンスの変化。

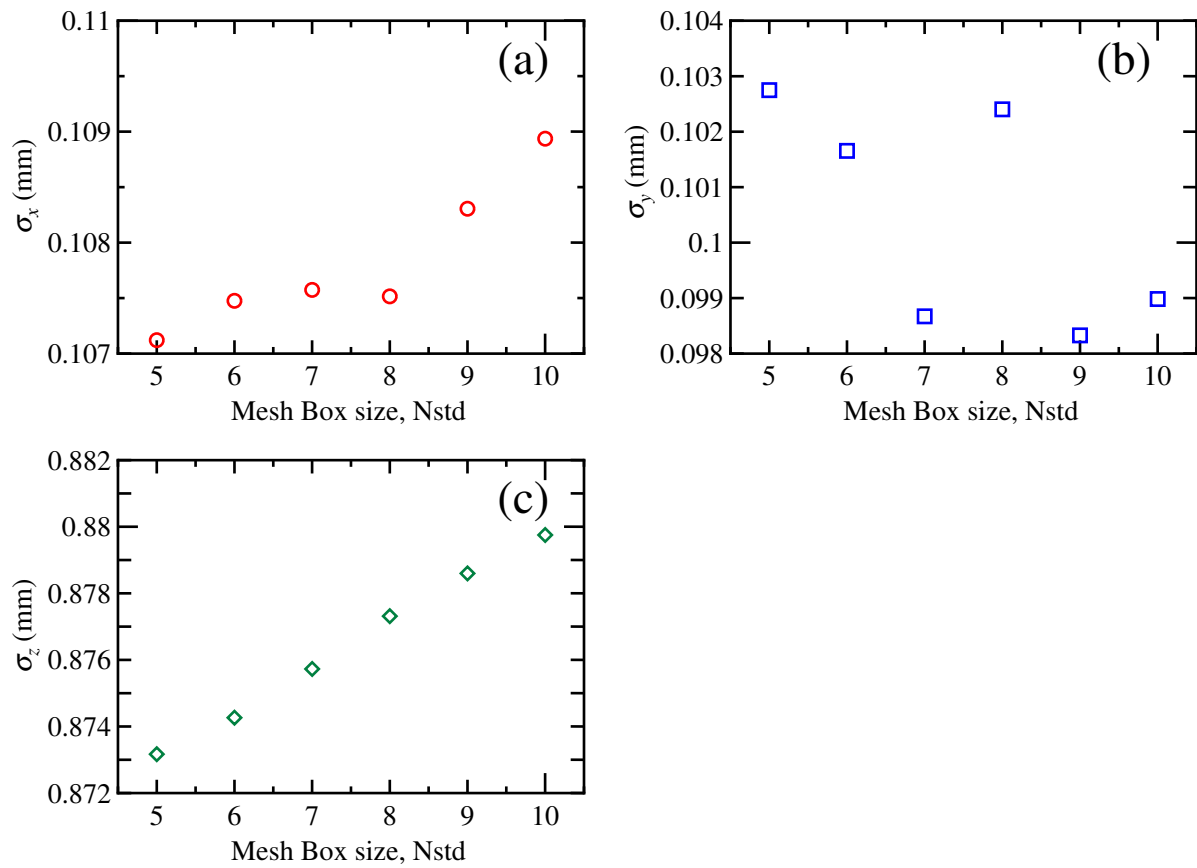


図 23: 境界領域サイズ Nstd を変えた時のビームサイズ、バンチ長の変化。

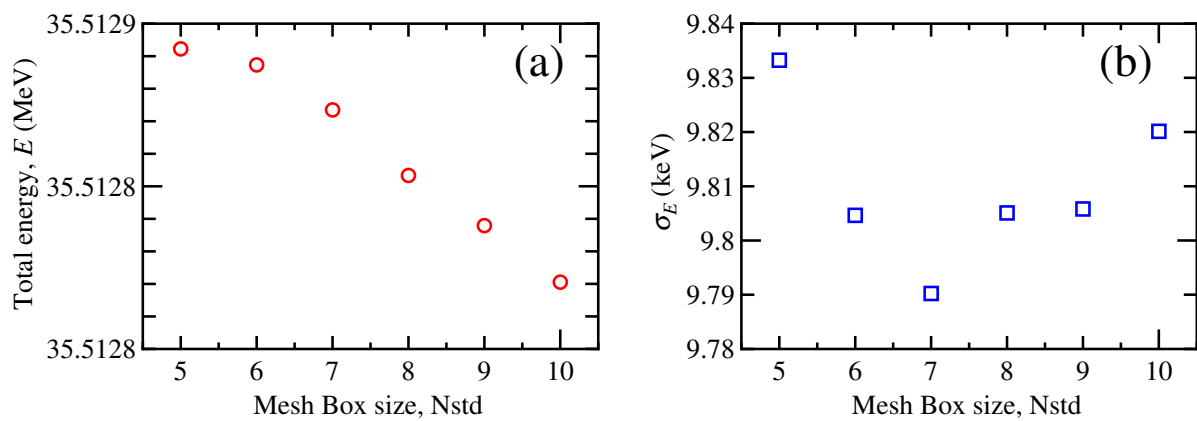


図 24: 境界領域サイズ Nstd を変えた時の全エネルギー、エネルギー拡がりの変化。

5 まとめ

六角形分布の原因を調査するために、各要素毎の粒子分布を GPT を用いて計算した。入射部空洞出口でコアからずれた粒子が位相空間上で観測され、合流部でも実空間分布が崩れることがわかった。六角形分布の原因はこれらの要素が合わさったものであると推測される。

また、空間電荷計算時の影響を調べるために、メッシュサイズ等のパラメタを変化させたときの粒子分布への影響を計算した。メッシュ幅を調整するパラメタを変えた場合には、分布の変化が見られるが、このパラメタをある一定の大きさを取れば、物理量が収束することが確認された。また、メッシュを囲む境界領域の大きさを決めるパラメタを変えた場合には、進行方向の物理量で明確な関係性が見出された。ただし、これらの空間電荷計算のパラメタが六角形分布を形成する原因ではないことが明らかになった。

次の課題としては、

- 入射器空洞のどこでコアから外れるか?
- 合流部での分布の崩れの原因
- 主空洞内での粒子分布の変化

を調べるといふことがある。これらについては今後調査を行っていく。

参考文献

- [1] 宮島 司, "cERL 第一コミッションングでの入射器パラメタ 合流部後の Q の間隔を変更した場合", 2011/10/28.
- [2] 宮島 司, "cERL 第一コミッションングでの入射器パラメタ 100 k マクロ粒子の場合の粒子分布", 2012/02/01.
- [3] "General Particle Tracer, User Manual".