

Resistive-Wall Beam Breakupの検討

東京大学物性研究所

中村典雄

RWBBUの運動方程式

半径 b 、電気伝導度 σ_c のビームパイプに対して
多バンチビーム（バンチ間隔 τ_B 、平均電流 I_B ）を入射する場合

M 番目のバンチ内粒子の運動方程式

$$y_M''(s) + k_y^2 y_M(s) = \sum_{N=0}^{M-1} S(M-N) y_N(s)$$

$$S(M) = \frac{a}{\sqrt{M}}, \quad a \equiv \frac{e^2 N}{E} \cdot \frac{c}{\pi b^3 (c\tau_B)^{1/2}} \sqrt{\frac{Z_0}{\pi\sigma_c}} = \frac{4I_B}{I_A} \frac{\delta_{skin}}{b^3}$$

$$I_B = \frac{eN}{\tau_B}, \quad I_A = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3 \gamma}{e}, \quad \delta_{skin} = \sqrt{\frac{\tau_B}{\pi\mu_0\sigma_c}}$$

a : ウェイク場の強さ k_y : 外部収束力（一様）

s : 粒子の位置 δ_{skin} : skin depth

Z_0 : 真空のインピーダンス

RWBBUの漸近解 (1)

先頭のバンチだけが位置誤差 ($y_{00} \neq 0$) を持って入射する場合

(A) 外部収束力が極めて小さい場合 ($k_y \approx 0$)

$$y_M = \frac{y_{00}}{5\sqrt{2\pi}} \left(\frac{t_{NF}}{t} \right)^{9/10} \frac{\tau_B}{t_{NF}} \cdot \exp \left[\left(\frac{t}{t_{NF}} \right)^{1/5} \right] \quad (at \ s = L)$$

$$t_{NF} \equiv \frac{\tau_B}{4\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^5 \frac{1}{a^2 L^4}$$

(B) 強い外部収束力がある場合

$$y_M = \frac{2y_{00}}{3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{t_{SF}}{t} \right)^{5/6} \frac{\tau_B}{t_{SF}} \cdot \exp \left[\left(\frac{t}{t_{SF}} \right)^{1/3} \right] \cdot \cos \left[\sqrt{3} \left(\frac{t}{t_{SF}} \right)^{1/3} - k_y L + \frac{\pi}{6} \right] \quad (at \ s = L)$$

$$t_{SF} \equiv \frac{16k_y^2 \tau_B}{\pi} \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{1}{a^2 L^2}$$

(J. M. Wang and J. Wu, PRST-AB 7, 034402(2004))

RWBBUの漸近解（2）

全てのバンチが同じ位置誤差（ $y_{00} \neq 0$ ）を持って入射する場合

(A) 外部収束力が極めて小さい場合（ $k_y \approx 0$ ）

$$y_M = \frac{y_{00}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{t_{NF}}{t} \right)^{1/10} \cdot \exp \left[\left(\frac{t}{t_{NF}} \right)^{1/5} \right] \quad (at \ s = L)$$

$$t_{NF} \equiv \frac{\tau_B}{4\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^5 \frac{1}{a^2 L^4}$$

(B) 強い外部収束力がある場合

$$y_M = \frac{y_{00}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{t_{SF}}{t} \right)^{1/6} \cdot \exp \left[\left(\frac{t}{t_{SF}} \right)^{1/3} \right] \cdot \cos \left[\sqrt{3} \left(\frac{t}{t_{SF}} \right)^{1/3} - k_y L - \frac{\pi}{6} \right] \quad (at \ s = L)$$

$$t_{SF} \equiv \frac{16k_y^2 \tau_B}{\pi} \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{1}{a^2 L^2}$$

漸近解の成立条件

良い近似であるための条件（十分条件ではない？）

(A) 外部収束力が極めて小さい場合 ($k_y \approx 0$)

$$\alpha_1^{4/5} \equiv \left[\frac{\sqrt{a\sqrt{\pi}L}}{4(M+1)} \right]^{4/5} \ll 1 \quad \frac{Mc\tau_B}{L} \gg 1$$

$$\chi_{NF} \equiv \frac{a\sqrt{\pi}}{k_y^2 \alpha_1^{2/5}} \gg 1 \quad t \approx M\tau_B \gg t_{NF} \equiv \frac{\tau_B}{4\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^5 \frac{1}{a^2 L^4}$$

(B) 強い外部収束力がある場合

$$\alpha_2^{2/3} \equiv \left[\frac{\sqrt{\pi}aL}{4(M+1)} \right]^{2/3} \ll 1 \quad \frac{Mc\tau_B}{L} \gg 1$$

$$\chi_{SF} \equiv \frac{k_y^2 \alpha_2^{1/3}}{a\sqrt{\pi}} \gg 1 \quad t \approx M\tau_B \gg t_{SF} \equiv \frac{16k_y^2 \tau_B}{\pi} \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{1}{a^2 L^2}$$

RWBBUシミュレーション

シミュレーションプログラムの作成

- ・横方向ウェーク場（ダイポールモード、ロングレンジ）
- ・一様な径と材質を持つビームパイプ
- ・ビームは等間隔で等電荷のバンチ列
- ・基本時間ステップはRF周期の整数分の1（分割数 N_D ）

シミュレーションプログラムの評価方法

(1) $k_y \neq 0$ でウェーク場が無い場合の解析解と比較する。

$$y_M(s=0) = y_{00} \neq 0 \rightarrow y_M(s) = y_{00} \cos(k_y s)$$

(2) $k_y=0$ で $M=2,3$ で解析解と比較する。

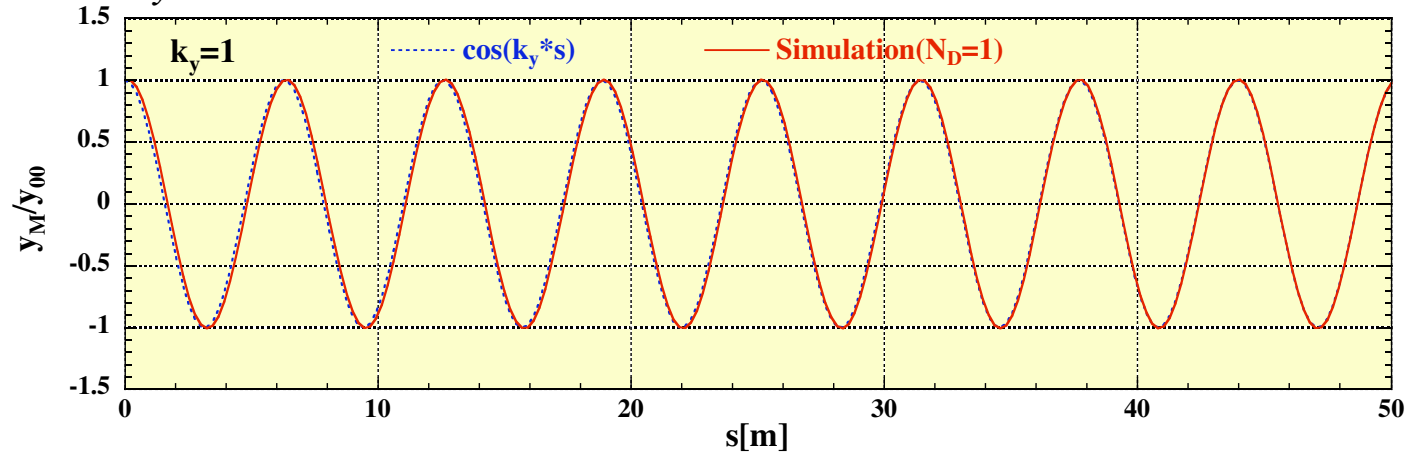
$$y_M(s=0) = y_{00} \neq 0 \rightarrow \begin{aligned} y_2(s) &= y_{00} + \frac{1}{2} a y_{00} s^2 \\ y_3(s) &= y_{00} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) a y_{00} s^2 + \frac{1}{24} a^2 y_{00} s^4 \end{aligned}$$

(3) 漸近解が成立する条件下で漸近解と比較する。

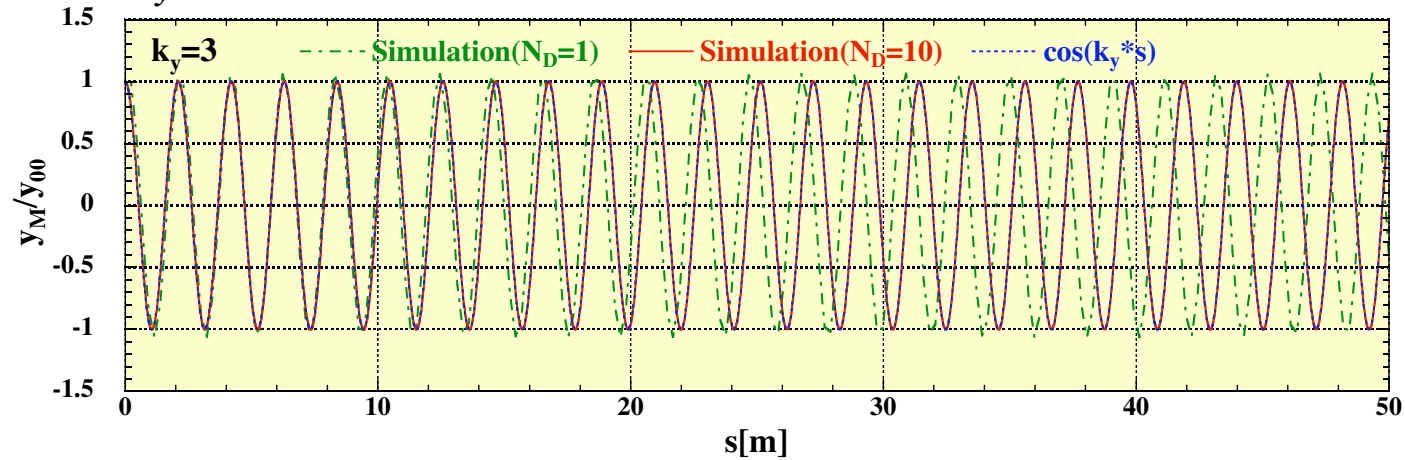
解析解との比較（１）

ウェーク場なし($a=0$)、外部収束力有り($k_y \neq 0$)

(a) $k_y=1, N_D=1$



(b) $k_y=3, N_D=1, 10$

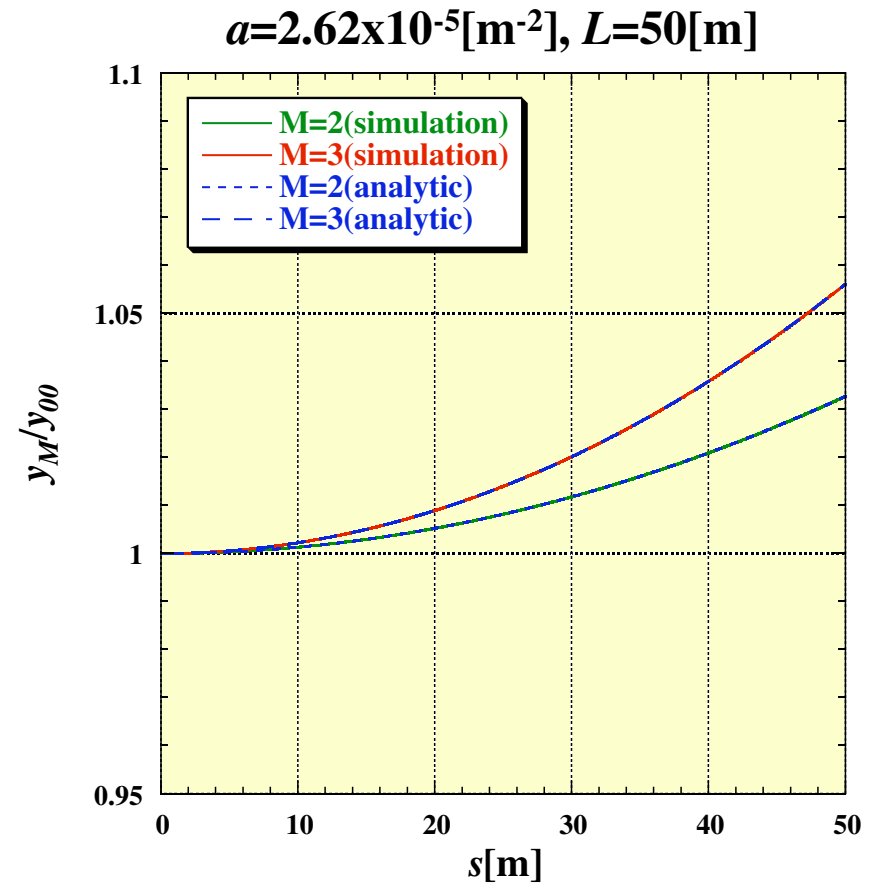
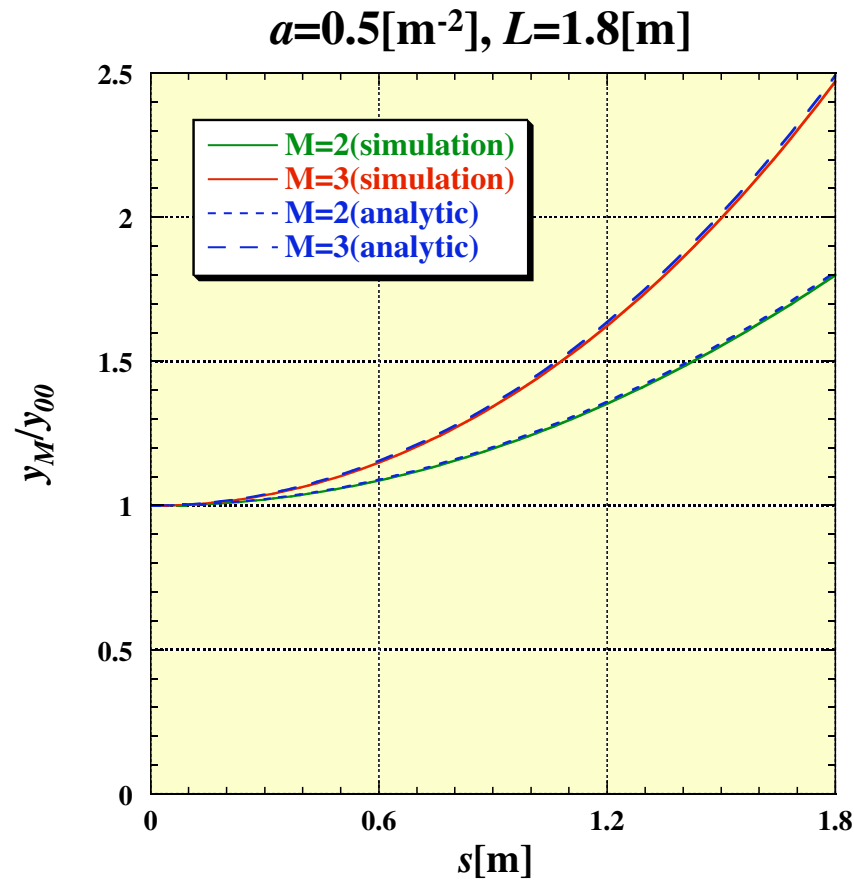


十分に細かい分割を行う必要がある！

解析解との比較（２）

ウェーク場有り ($a \neq 0$)、外部収束力なし ($k_y = 0$)

全てのバンチが同じ位置誤差 ($y_{00} \neq 0$) を持つ場合

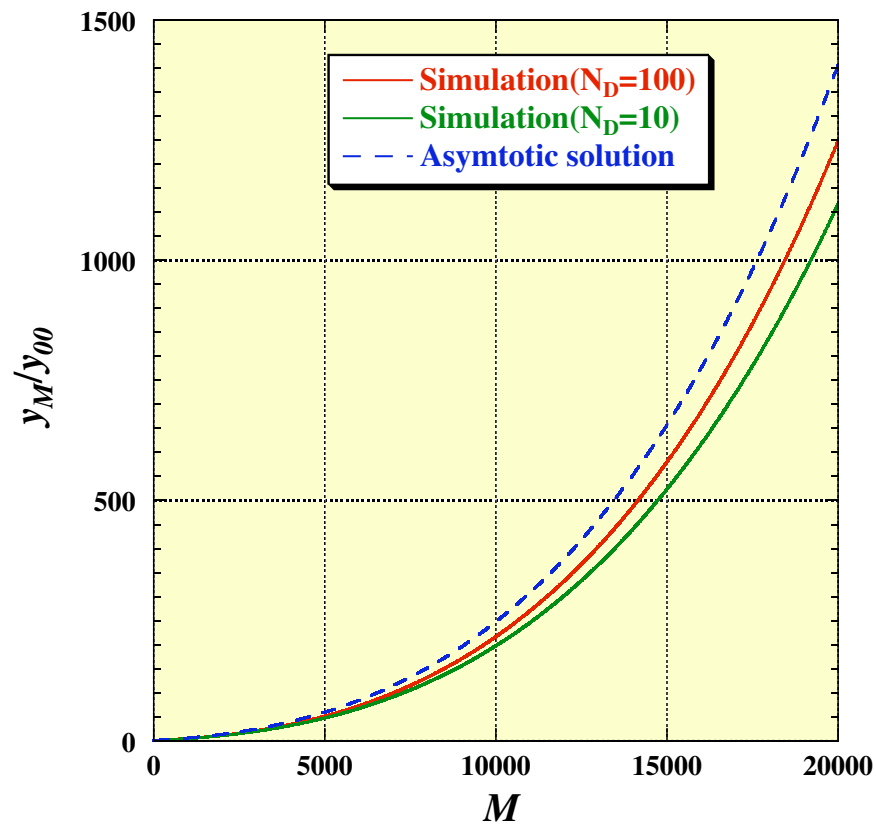


漸近解との比較 (1)

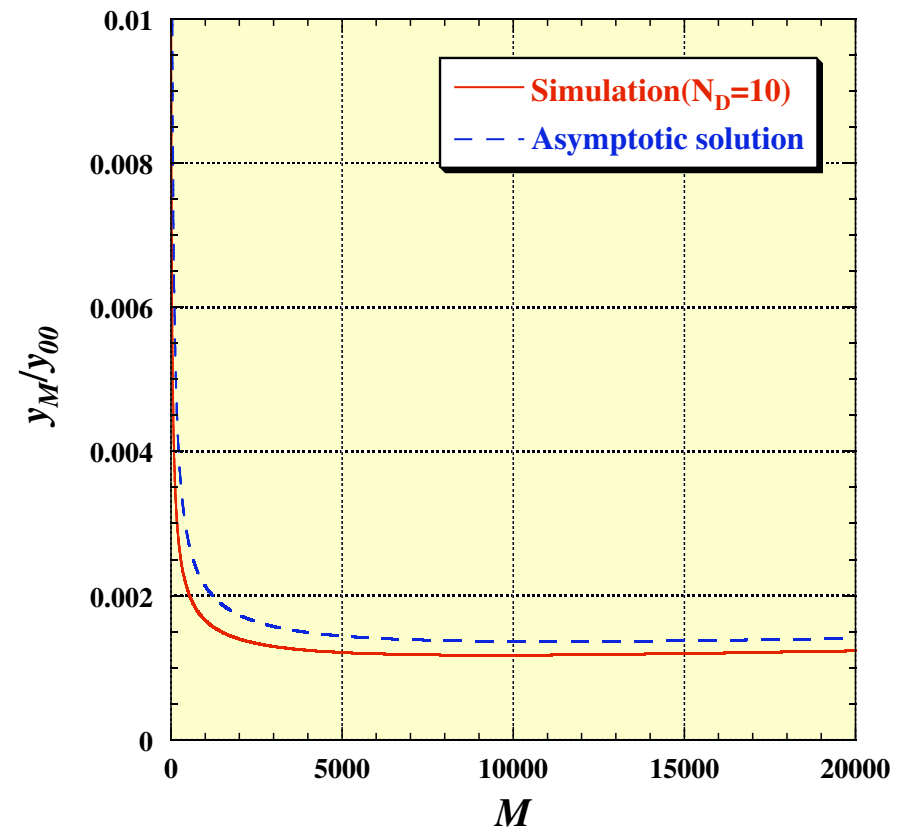
外部収束力がない場合 ($k_y=0$)

先頭のバンチだけが位置誤差 ($y_{00} \neq 0$) を持つ場合

$a=0.5[\text{m}^{-2}], L=50[\text{m}]$



$a=2.62 \times 10^{-5}[\text{m}^{-2}], L=50[\text{m}]$

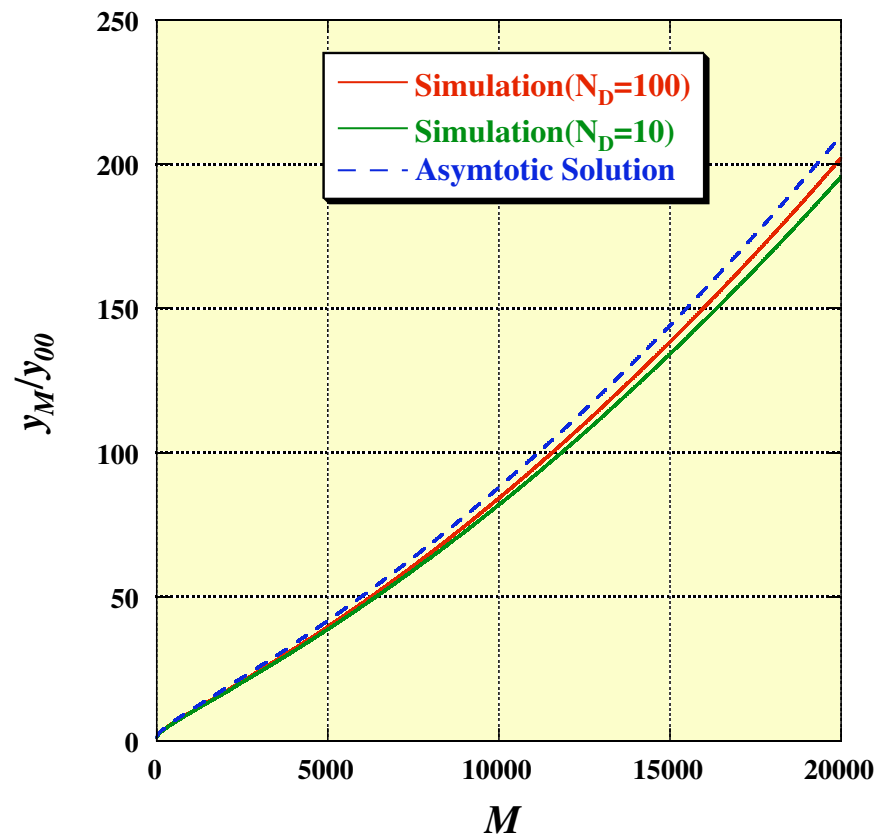


漸近解との比較 (2)

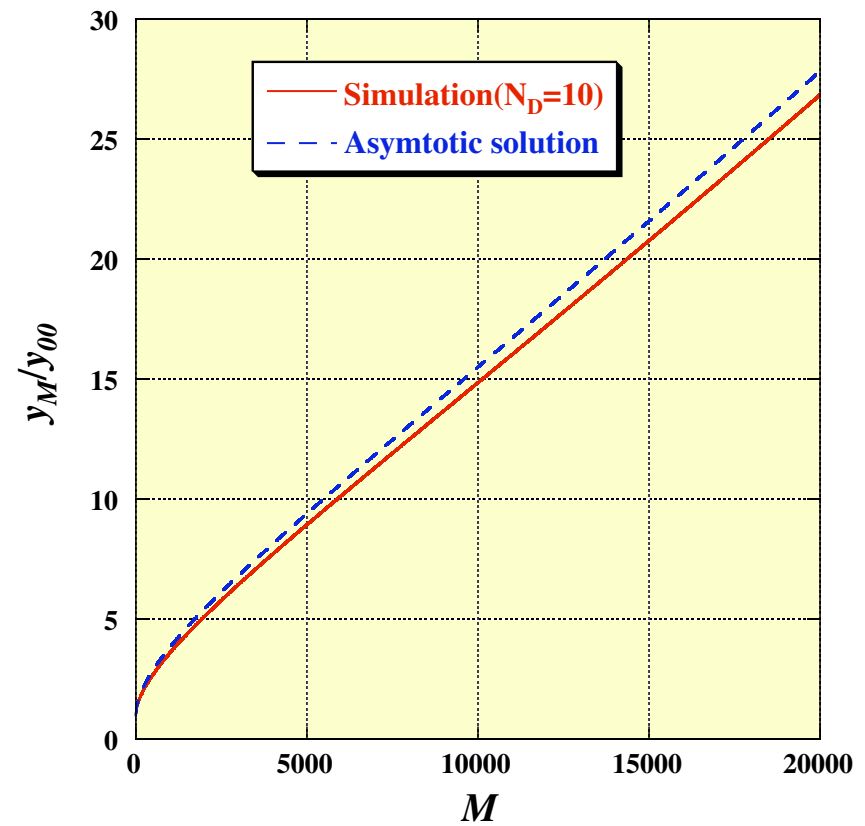
外部収束力がない場合 ($k_y=0$)

全てのバンチが同じ位置誤差 ($y_{00} \neq 0$) を持つ場合

$a=0.05[\text{m}^{-2}], L=1.8[\text{m}]$



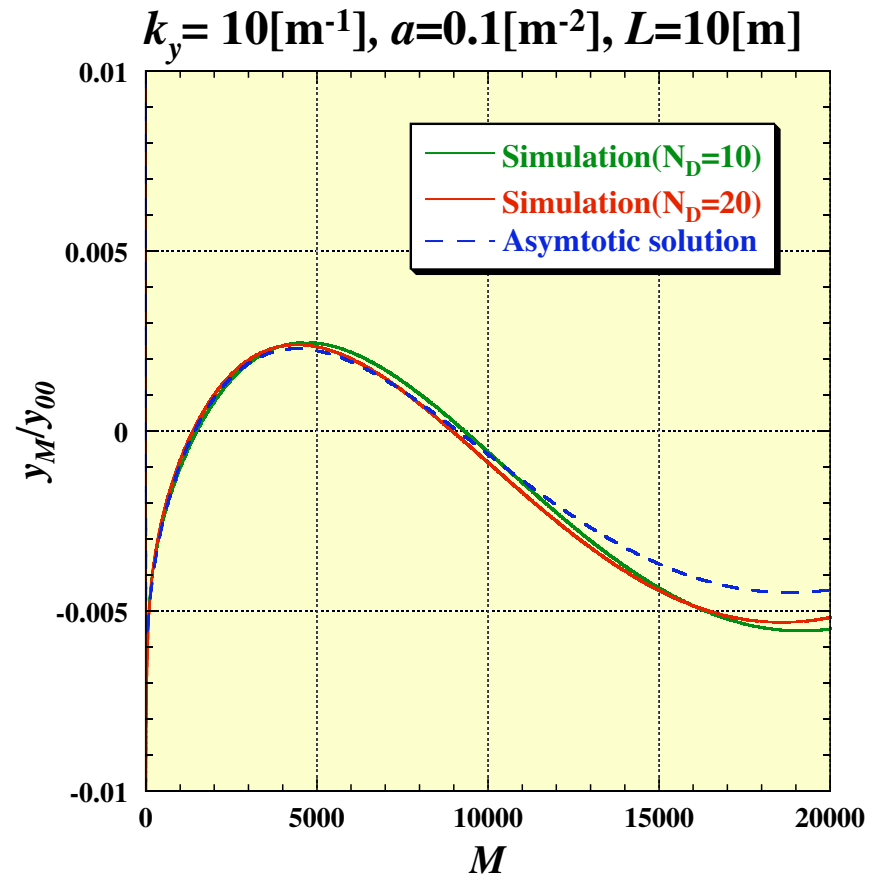
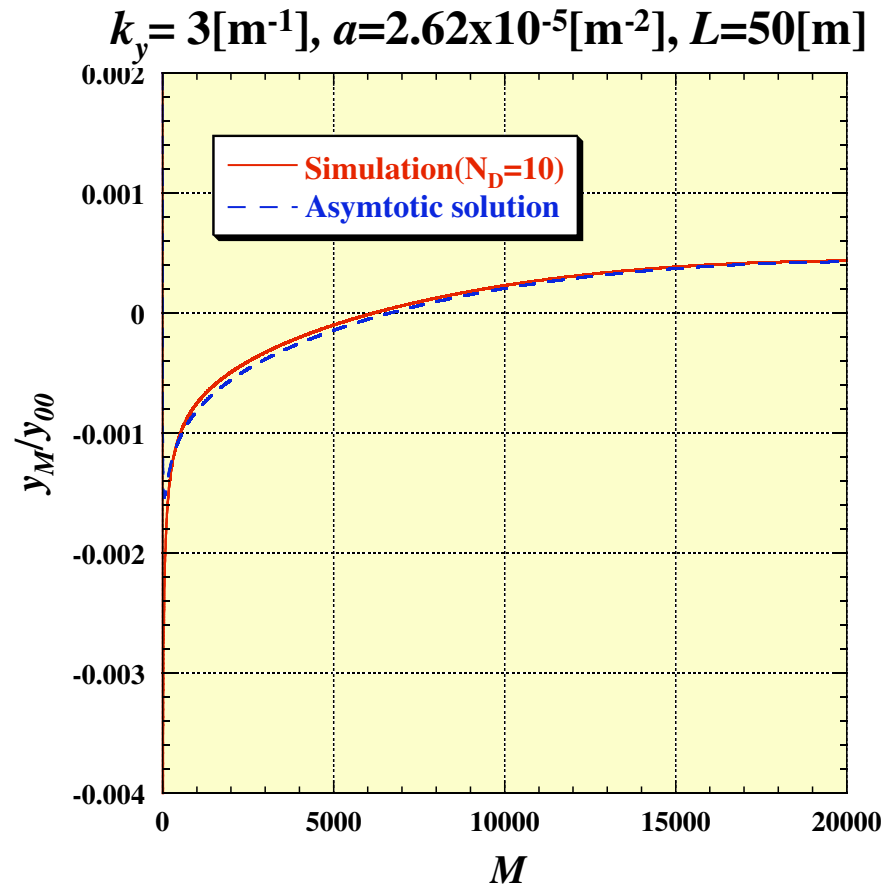
$a=2.62 \times 10^{-5}[\text{m}^{-2}], L=50[\text{m}]$



漸近解との比較 (3)

強い外部収束力がある場合

先頭のバンチだけが位置誤差 ($y_{00} \neq 0$) を持つ場合



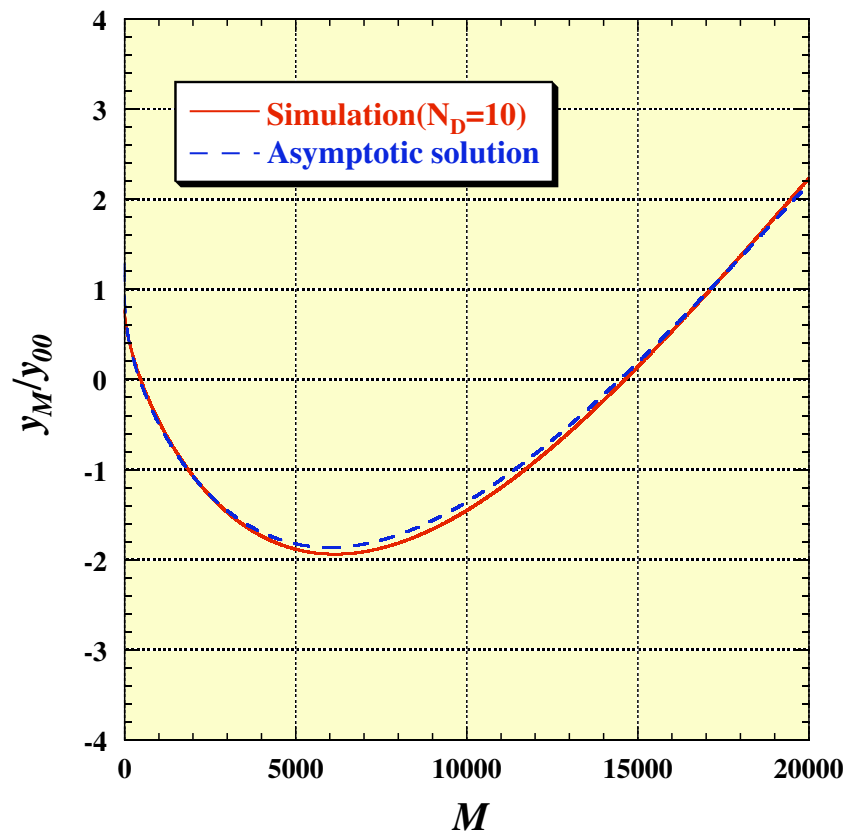
$k_y = 3[\text{m}^{-1}] \Leftrightarrow$ 挿入光源磁場 $B=50[\text{T}] @ E=5\text{GeV}$, $B=1[\text{T}] @ E=100\text{MeV}$
四極磁場 $B'=150[\text{T/m}] @ E=5\text{GeV}$, $B'=3[\text{T/m}] @ E=100\text{MeV}$

漸近解との比較 (4)

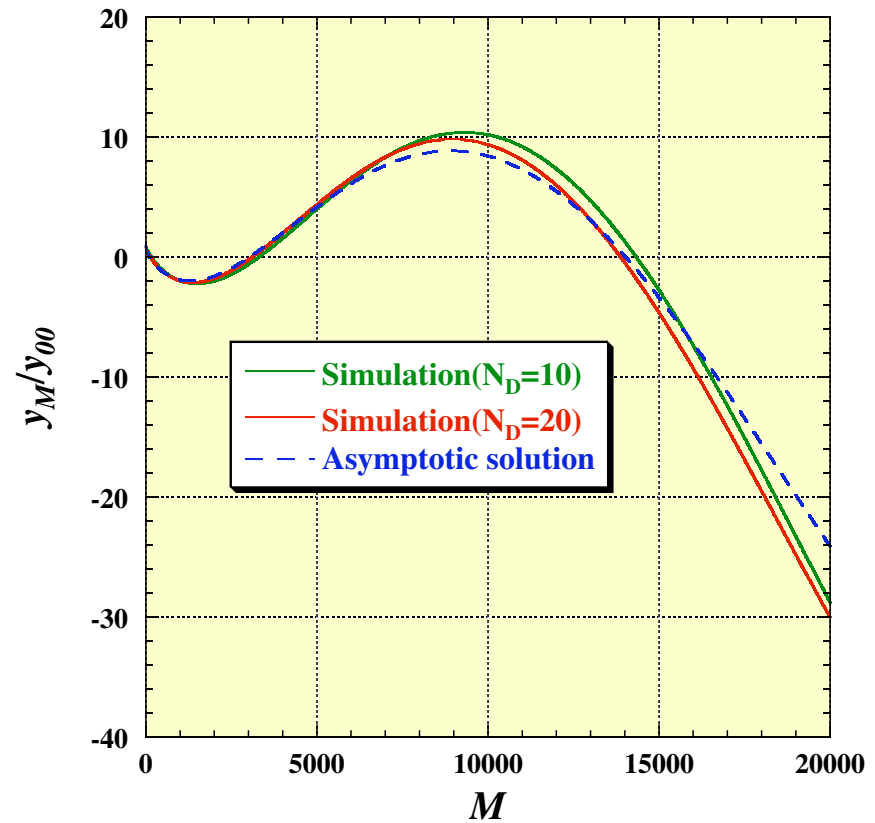
強い外部収束力がある場合

全てのバンチが同じ位置誤差 ($y_{00} \neq 0$) を持つ場合

$k_y = 3[\text{m}^{-1}]$, $a = 2.62 \times 10^{-3}[\text{m}^{-2}]$, $L = 50[\text{m}]$



$k_y = 10[\text{m}^{-1}]$, $a = 0.1[\text{m}^{-2}]$, $L = 10[\text{m}]$



まとめ（課題を含む）

- (1) 横方向のresistive-wall wakeによる多バンチBBU(beam break-up)を研究するためにシミュレーションプログラムを作成した。
- (2) シミュレーションプログラムを漸近解や解析解と適切な条件下で比較した結果、両者は良く一致した。作成したプログラムに問題がないことを確認できた。
- (3) 漸近解は適用範囲が非常に狭い（外部収束力、バンチ数、初期条件）ので、シミュレーションプログラムを利用していくことが不可欠である。
- (4) 今後は、バンチ数（経過時間）を増やすとともにより現実的なパラメータでシミュレーションを行っていく。さらに複雑な環境下（非一様なダクトや非一様な外部収束力、有限の厚みを持つ内面メッキダクト）でもシミュレーションが可能なように、プログラムを発展させていく予定である。