

コンパクト ERL 電子ビーム光学系の 設計研究

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻
指導教員 中村典雄 准教授

白神剛志

コンパクト ERL 電子ビーム光学系の設計研究

概要 (abstract)

エネルギー回収型ライナック(ERL)は大電流、超低エミッタンス、超短バンチの電子ビームを生成できることから次世代放射光源用の加速器として期待されている。しかし、このような電子ビームを実現するには、電子ビーム光学系(optics)を運転モードに応じて最適に設計する必要がある。例えば、バンチ圧縮、エミッタンスの保持、高効率のエネルギー回収、ビームロスの回避など、いくつかの課題がある。コンパクト ERL は 5GeV クラスの ERL 本機に向けた ERL 構成機器の動作実証、ビームダイナミクスの研究を行う。我々は数値シミュレーションコード elegant を用い、コンパクト ERL の電子ビーム光学系について CSR(Coherent Synchrotron Radiation)効果を含んだ設計研究を行ってきた。この論文では大電流モード、バンチ圧縮モード、低エミッタンスモードについて行ってきた研究結果を示す。

目次

1 章 序論	5
1.1 放射光.....	5
1.2 放射光源の歴史.....	5
2 章 ERL とは.....	7
2.1 ERL とは.....	7
2.2 ERL の概念	8
2.3 コンパクト ERL について	10
3 章 電子ビーム光学系の基礎.....	13
3.1 ビーム力学の基礎	13
3.1.1 粒子の運動方程式.....	13
3.2 電磁石の磁場	16
3.2.1 2次元の場合	16
3.2.2 電磁石のギャップと磁場の強さ.....	18
3.3 転送行列	21
3.3.1 ドリフトスペース.....	21
3.3.2 偏向電磁石	22
3.3.3 収束型 4 極電磁石	23
3.3.4 発散型 4 極電磁石	24
3.3.5 矩形偏向電磁石	25
3.4 トウイスパラメータとその性質.....	26
3.4.1 クーラン・シュナイダー不変量.....	26
3.4.2 規格化運動量と規格化座標.....	28

3.4.3	位相空間内の楕円の転送	28
3.5	運動量偏差による収束のずれと 6 極電磁石による補正.....	29
3.6	分散による軌道長のずれ.....	30
3.7	有効エミッタンスと規格化エミッタンス	32
4 章	CSR について	33
4.1	はじめに	33
4.2	コヒーレントシンクロトロン放射光(CSR)とインコヒーレントシンクロトロン放射光	34
4.2.1	Liénard-Wiechert ポテンシャル	34
4.2.2	シンクロトロン放射光.....	36
4.2.3	コヒーレントシンクロトロン放射光	37
4.3	CSR の電子バンチに及ぼす影響.....	39
4.3.1	相互作用ハミルトニアンとローレンツ力	40
4.3.2	CSR の影響によるエネルギー分布と軌道の変化.....	41
5 章	光学系の設計方針	48
6 章	大電流モードの電子ビーム光学系の設計	50
6.1	大電流モードについて	50
6.2	シミュレーション結果	50
6.2.1	初期バンチ長 1ps におけるシミュレーション	50
6.2.2	初期バンチ長 2ps,3ps におけるシミュレーション結果	58
6.2.3	エネルギー回収率について.....	64
7 章	低エミッタンスモードの電子ビーム光学系の設計	66
7.1	低エミッタンスモードについて	66
7.2	シミュレーション結果	66

8 章	バンチ圧縮モードの電子ビーム光学系の設計.....	70
8.1	バンチ圧縮モードについて.....	70
8.2	バンチ圧縮の方針.....	70
8.3	バンチ圧縮のシミュレーション結果.....	72
8.4	ビームサイズの調整.....	76
8.5	初期バンチ長依存性.....	86
8.5.1	バンチ圧縮について.....	86
8.5.2	ビームサイズとエミッタンス.....	89
8.6	エネルギー依存性.....	93
8.7	初期運動量偏差依存性.....	96
8.8	初期エミッタンス依存性.....	98
8.9	電荷量依存性.....	100
9 章	結論.....	103
	謝辞.....	104
Appendix A	バンチ圧縮モードの設計方法.....	105
Appendix B	バンチ圧縮モードでの R_{56} の算出.....	110
Appendix C	主加速モジュール 3 台のシミュレーション.....	112
	参考文献.....	119

1章 序論

1.1 放射光

シンクロトロン放射光は、高エネルギーの電子等の荷電粒子の軌道が磁場中でローレンツ力により曲げられる時に発生する光である。放射光は連続的なスペクトルを持ち、指向性がよいため輝度が高く、偏向性やパルス特性といった優れた特徴を有している。そのため放射光は今日、物質科学、生命科学、材料科学、医学等の多くの研究分野において、なくてはならないプローブとして大いに活躍している。

1.2 放射光源の歴史

放射光科学の今日の隆盛をもたらした最大の要因の一つは、言うまでもなく放射光源の進歩である。歴史を振り返ると、放射光源はこれまで段階的に発展を遂げてきた。放射光は1940年代に Schwinger 等によって理論的に予測されていたが、1947年に電子シンクロトロンで初めて実際に確認された。当時、放射光は素粒子実験用の加速器にとってエネルギー損失をもたらす「邪魔者」とみなされていたが、その「邪魔者」の有用性に着目した少数の研究者たちにより、素粒子実験に寄生する形で放射光の利用が細々と開始された(第1世代)。その後、放射光の有用性が広く認識されるにつれて放射光専用施設を望む声が高まり、1970年代から世界各地で放射光専用施設が建設されるようになった(第2世代)。日本では東京大学物性研究所において1975年に放射光専用リングであるSOR-RINGが立ち上がり、1982年には高エネルギー物理学研究所(現在は高エネルギー加速器研究機構)にX線領域をカバーすることができる Photon Factory(PF)が完成した。第2世代の放射光施設では光源として主に偏向電磁石を用いるが、磁石を周期的に配列した光源(挿入光源)を利用することによりさらに輝度の高い光を発生させることができる。そこで1990年代以降、アンジュレータと呼ばれる挿入光源を主体とした放射光施設が建設されるようになった(第3世代)。第3世代の大型X線放射光施設としてSPring-8(日本)、APS(米国)、ESRF(欧州)、極紫外線・軟X線放射光施設としてALS(米国)、ELETTRA(イタリア)、BESSY-II(ドイツ)等がある。近年、アンジュレータ技術の進歩に

よりリングのエネルギーを下げる事が可能になり、6~8GeVの大型X線放射光施設とほぼ同等の性能を持つ3~5GeVクラスの中型放射光施設が登場してきている(新第3世代)。

第1世代から新第3世代の放射光施設では円形加速器(シンクロトロン)に電子や陽電子を蓄積して光を発生させる。蓄積リングでは、入射器から入射した電子が周回を繰り返しながら放射減衰と放射励起による平衡状態に到達する。そのため、電子ビームの特性は入射電子の素性には依存せず、加速器の規模や電子ビームのエネルギー等によってほぼ決まることになる。これは別の言い方をすると、蓄積リングで到達可能な光源性能には限界があるということである。現在、蓄積リング型光源はこの性能限界に近づきつつあり、将来的に大幅な性能向上はもはや見込めそうにない状況である。そこで、この限界を超えるために現在検討されているのが線形加速器(ライナック)をベースにした放射光源(次世代光源)である。次世代光源では、電子ビームは特定の軌道を一度通過するだけなので放射光による平衡状態には達せず、入射器の性能が電子ビームの特性や光源性能を大きく左右する。したがって原理的には、入射器が性能限界に達するまで、光源のアップグレードが可能である。

現在、線形加速器をベースにした次世代光源として、エネルギー回収型ライナック(Energy Recovery Linac、以下 ERL)と自由電子レーザー(Free Electron Laser)の二つが世界各地で計画されている。日本では、高エネルギー加速器研究機構(KEK)のPhoton Factory(PF)で、ERLを次期光源候補とする決定が下された。その最大の理由は、ERLが既存光源をはるかに上回る性能を持ち、なおかつ多くのビームラインを収納することができることである。これにより最先端科学を切り開くことができるだけでなく(先端性)、多くのユーザーに利用の機会を提供することができる(汎用性・多様性)。2006年4月にKEKの中にERL計画推進室が設置された、この推進室が中心となって、KEK内外の加速器研究者と共同で、ERLの開発研究が進められている。-

2章 ERLとは

2.1 ERLとは

エネルギー回収型ライナック(**Energy-Recovery Linac; ERL**)は蓄積リングの長所(高い安定性、大電流の連続加速)とライナックの長所(電子バンチの自在な整形)の両者を併せ持つ可能性がある新しい加速器である。

ERL 型次世代放射光源の特徴は、(1)多数ユーザーの同時利用、(2)蓄積リングに匹敵する極めて高い安定度、(3)回折限界を満たす電子ビームからのコヒーレント X 線の発生、(4)大電流加速による高い放射光フラックス、(5)バンチ圧縮によるフェムト秒 X 線の発生、(6)利用形態に応じた自在のパルス繰り返し周波数、(7)放射光と外部レーザーのフェムト秒オーダーでのタイミング同期などである。

5GeV クラスの ERL 光源から得られる X 線放射光(10keV)は、第 3 世代光源を平均輝度で 3 桁、ピーク輝度で 4 桁上回るが、ERL 型放射光源では単純な輝度の向上だけでなく放射光利用の質的な変化も期待できる。フェムト秒の X 線とレーザーを組み合わせることで、物質の相転移現象や化学反応の初期過程を時分割で観察することができるようになる。これはポンプ・プローブ実験(レーザーの手法)を X 線領域に拡大するもので、放射光の利用を静的な解析から動的な解析へと発展させる。ERL 型放射光源では縦横同一エミッタンスの電子ビームからの X 線をナノメートルサイズの微小領域に集光することができるので、物質の局所構造を解析することができるようになる。第 3 世代放射光ではコヒーレント成分が 0.1%程度(10keV 領域)にとどまるのに対して、ERL 型次世代放射光源では放射光の数十%がコヒーレンスを有する。これを用いれば、非結晶物質の構造解析や磁気スペckル解析といったコヒーレント X 線の利用研究も格段に進歩する。

さらに、ERL 型次世代放射光源では、いわゆるアンジュレータ放射以外の光源を組み込むことが可能である。例えば、フェムト秒電子バンチからのコヒーレント放射を用いて大強度のテラヘルツ光を発生する、レーザーをガスターゲットに集光し発生する高次高調波を電子ビームで増幅し時間コヒーレンスを有する軟 X 線レーザー光を得る(seeded FEL)、レーザーと電子ビームの衝突により単色性のよいガンマ線を発生する(レーザーコンプトン γ 線)などである。

ここで、世界各地で計画されている（あるいは計画された）ERLプロジェクトについて表 2.1 にまとめる。

表 2.1 : 世界の ERL プロジェクト

Cornel CHESS	BNL PERL	LBL	BINP MARS	Daresbury 4GLS	Erlangen	KEK	
5.3	3 - 7	2.5 - 3.1	5.4	0.6	3.5	2.5 - 5	GeV
100	200	0.04	1.0	100	100	10 - 100	mA
0.3	0.1 - 0.4	0.05	<1	0.05	2	0.05	ps
0.15	0.04		0.003	<1	0.3	0.01	nm-rad

2.2 ERL の概念

図 2.1 に最も簡単な ERL の概念図を示す。○の中の数字は電子が走る順序を示す。

- [1] 電子ビームを電子銃①で作る。
- [2] 入射加速器②で比較的低いエネルギー E_0 まで加速する。
- [3] 超伝導線形加速器③で高いエネルギー E まで加速する。
- [4] 曲線部④、直線部⑤、曲線部⑥を通過して放射光を出す。
- [5] 超伝導線形加速器に戻って、 E_0 まで減速する。
- [6] ビームダンプ⑧で廃棄する。

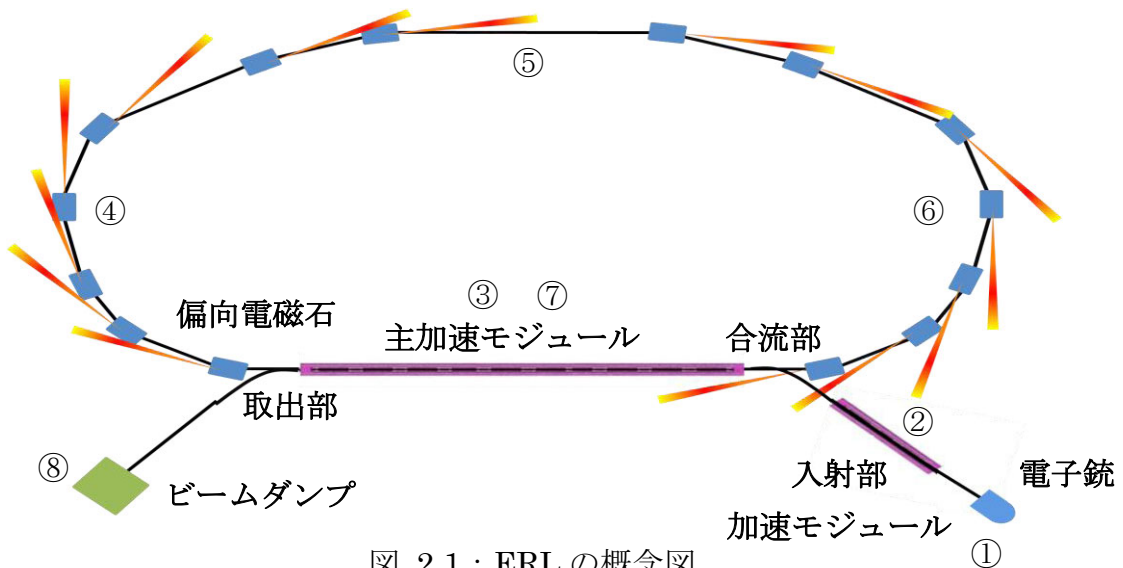


図 2.1 : ERL の概念図

超伝導線形加速器③での加速のとき、ビームは正弦波の山の付近に置かれ、⑦の減速時には 180° 位相をずらし谷の位相に来るように、1 周の長さを調整しておく。つまり、1 周の長さが加速波長の半奇数倍になるように調整する。これによって、加速の時に消費されたエネルギーは、減速時にほとんど加速管に戻され、後から来る電子の加速に使われる。線形加速器を単に加速にだけ用いた場合、電子の平均電流を I とすると、少なくとも $I \times E$ の消費電力が必要である。例えば、 $I=100$ mA、 $E=5$ GeV なら、これだけで 500 MW になり、膨大な電力が必要になるが、そのうち放射光エネルギーに変換されるのは極わずかである。

エネルギー回収をする ERL の場合は、施設の電力消費 P は、

$$P = I(E - E_0) - RI(E - E_0) + IE_0 + W_{rad} + W_{cool} \quad (2-1)$$

となる。第 2 項は回収電力で、 R は超伝導線形加速器のエネルギー回収率、つまり、加速に消費されたマイクロ波電力の内、どれだけが回収されたかを表すパラメータである。第 3 項は入射器の消費電力で、これは回収されない。 W_{rad} は放射光エネルギー、 W_{cool} は、超伝導加速器の冷却に必要な電力である。例えば、 $E=5$ GeV、 $E_0=10$ MeV、 $I=100$ mA なら、99.9% のエネルギー回収により、最初の 3 項は 1.5 MW にまで抑えられる。

なぜこのようなことをするか。電子貯蔵リングではシンクロトロン放射光のために、入射された電子は短時間で平衡状態になる。入射時のビームの性質(エネルギー幅、バンチ長、エミッタンスなど)に関係なく、リング内のビーム力学によって決まる値に落ち着く。平衡後のビームパラメータはリングの設計で調整できるが、現実的な範囲は、規格化エミッタンス数 $mm \cdot mrad$ 以上、バンチ長 10 ps 以上、エネルギー幅 0.05% 以上である。逆に ERL では 1 回しか回さないため平衡状態に達することがなく、入射ビームの性能がそのまま表れる。電子銃の性能限界までビームパラメータを上げることが可能となる。しかし、1 回しか電子を回さず加速してすぐ捨てるではエネルギー消費が膨大となる。そこで考え出されたのが加速した電子のエネルギーを減速器で回収し次の電子の加速に生かすというエネルギー回収型である。

2.3 コンパクト ERL について

KEKでは、ERL放射光源の実現に必須の要素技術開発を行うにあたって、全機器の総合的な動作試験を行うための小型 ERL 装置(コンパクト ERL)を建設する計画を立案した。ERL 型次世代放射光源の実現に必要なすべての要素技術を完成し、その性能を実証することがコンパクト ERL 建設の目的である。コンパクト ERL のサイズは X 線放射光源に比べればはるかに小さいが、ERL 型次世代放射光源で新たに必要となる要素技術のすべてが含まれている。各要素技術は単独で試験するのみならず、ERL 装置として実際に運転することで機器性能の総合的な実証が行えると期待できる。

また一方でコンパクト ERL を光源として利用する提案も行われている。加速器要素技術の実証と併せて、コンパクト ERL で得られる光をユーザー利用実験に提供することもコンパクト ERL 建設の目的である。コンパクト ERL では、レーザーコンプトン散乱で発生する X 線、および偏向電磁石部で発生する大強度テラヘルツ光をユーザー実験に提供することができる。レーザーコンプトン散乱ではレーザーに同期したフェムト秒の超短パルス X 線が得られ、ポンプ・プローブ方式による物質の動的解析に有用な光源となる。コンパクト ERL で得られるテラヘルツ光は平均強度、ピーク強度ともに強い光であり、イメージングを中心とした分析光源としてのみならず、励起光源としてもユニークな装置となる。

コンパクト ERL の概要として表 2.2 に 5GeV クラスの ERL との比較、図 2.2 にコンパクト ERL の配置図、表 2.3 に主なコンパクト ERL のパラメータを示す。

表 2.2 : 5GeV-ERL 放射光源とコンパクト ERL の主なパラメータの比較

	5GeV ERL 放射光源	コンパクト ERL
周回エネルギー	5GeV	45-165MeV
平均電流	10-100mA	10-100mA
電子バンチ長	0.1-3ps	0.1-3ps
電子バンチ電荷量	7.7-77pC	7.7-77pC
エネルギー広がり	5×10^{-5}	$< 3 \times 10^{-4}$
規格化エミッタンス	0.1-1mm-mrad	0.1-1mm-mrad

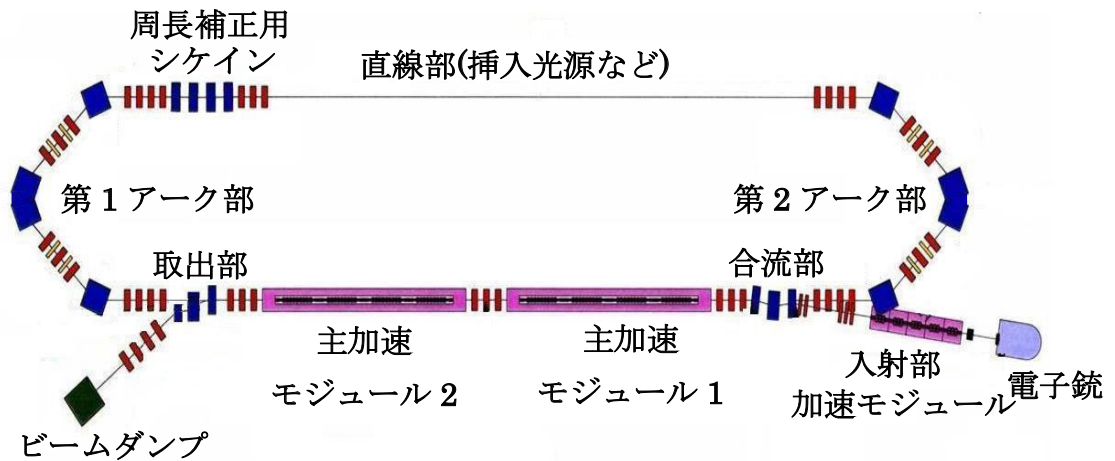


図 2.2 : コンパクト ERL の配置図

図 2.2 において、ビームは電子銃で生成され、入射部加速モジュールで 5 MeV まで加速される。入射ビームは合流部で ERL の周回部に合流し、主加速モジュール 1,2 を通り 45~165 MeV まで加速される。加速されたビームは、第 1 アーク部を通り直線部に入る。直線部のシケインでは軌道バンプを作って周長補正を行う。また、直線部では挿入光源などの設置が可能で、放射光による利用実験が検討されている。その後、ビームは第 2 アーク部を通り、主加速モジュール(減速モジュール)で減速される。減速されたビームは、取出部で周回部から取り出され、ビームダンプにて廃棄される。

表 2.3 : コンパクト ERL のパラメータ(主加速器クライオモジュール 1 台の構成)

電子ビーム	
周回エネルギー	45-85 MeV
平均電流	10-100 mA
バンチ繰り返し	1.3 GHz
規格化エミッタンス	1 mm-mrad(77pC) 0.1 mm-mrad(7.7pC)
エネルギー広がり(rms)	$<3 \times 10^{-4}$
バンチ長(通常モード)	1-3 ps(rms)
バンチ長(圧縮モード)	≤ 100 fs(rms)
電子銃	
加速電圧	500 kV
入射用超伝導加速器	
セル数・空洞数	2 セル・3 空洞
加速勾配	7.4(14.7) MV/m
加速電圧	5(10) MV
主超伝導加速器	
セル数・空洞数	9 セル・4 空洞
加速勾配	10-20 MV/m
加速電圧	55-80 MV
周回軌道	
合流部	3-ダイポール型
アーク部	トリプルベンドアクロマット(TBA)
周長	70 m
冷凍・液化機	
冷凍能力(公称値)	600W at 4.4K または 250L/hr

3章 電子ビーム光学系の基礎

3.1 ビーム力学の基礎

3.1.1 粒子の運動方程式

基本的な粒子の運動方程式が

$$x'' + K(s)x = 0 \quad (3-1)$$

という形をとることを示す。ここで s は粒子の軌道長で、 x は理想な粒子の運動

からの水平方向の偏差、 $x'' = \frac{d^2}{ds^2}x$ である。垂直方向の一様磁場が存在する中

での水平方向の電子の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}p = \frac{mv^2}{r} - evB \quad (3-2)$$

と書ける。右辺第1項は向心力、第2項はローレンツ力である。ここで p は粒子の運動量、 e は電子の電荷、 v は電子の速度、 B は磁場の強さ、 r はある中心座標から見た電子の距離である。粒子の質量を、何周かする程度の間は一定 $m(t) = \text{const.}$ とみなすと、

$$\frac{d}{dt}p = m \frac{d}{dt}v \quad (3-3)$$

変数を時間から軌道長 $vt = s$ へ変換する。向心力の中心を原点とすると、極座標系における同径方向の距離 r が座標となり、方程式は

$$mv^2 \frac{d^2}{ds^2}r = \frac{mv^2}{r} - evB \quad (3-4)$$

従って、

$$p \frac{d^2}{ds^2}r = \frac{p}{r} - eB \quad (3-5)$$

となる。ここで $r = \text{const.}$ とし、偏向電磁石による曲げの力と向心力が釣り合っているとすると

$$\frac{mv_0^2}{r} = ev_0 B_0(\rho) \quad (3-6)$$

すなわち

$$\frac{1}{r} = \frac{eB_0}{p_0} \quad (3-7)$$

となる。この時、 r が理想の軌道上に居らず、微小に x だけずれていたとしたら、 $r = \rho + x$, $\rho = \text{const.}$ となり、また $\rho \gg x$ より、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho + x} = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) \quad (3-8)$$

となるので、式(3-5)は

$$x'' + \frac{x}{\rho^2} = 0 \quad (3-9)$$

となる。次に、上の式とは独立した収束力 $k(s)$ を考えると、運動方程式は

$$x'' + k(s)x = 0 \quad (3-10)$$

となる。この $k(s)$ は4極電磁石で与えられ

$$\frac{e}{p_0} B' = \frac{B'}{B_0 \rho} = k(s) \quad (3-11)$$

という磁場で与えられる。この時水平方向が収束するためには $k(s)$ の値は正である。また、この磁場を与える4極電磁石は水平方向には収束を与えるが、垂直方向には発散を与える。この4極電磁石の磁場方向を変えることで発散と収束を入れ替えることができ、この4極電磁石を交互に配置することで水平・垂直の両方向に収束を与える。

一般的に加速器は以上の偏向電磁石と4極電磁石で構成されているので、運動方程式は式(3-9)、(3-10)より

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + k(s)\right)x = 0 \quad (3-12)$$

となり、粒子の運動方程式の基本となる式(3-1)が求まる。

ここまでは厳密な式である。磁場の誤差や運動量のずれを考慮し、

$$\begin{aligned} p &\rightarrow p_0 + \Delta p \\ B &\rightarrow B_0(r) + \Delta B \end{aligned} \quad (3-13)$$

とおく。方程式は

$$\frac{d^2}{ds^2} r = \frac{1}{r} - \frac{e(B_0(r) + \Delta B)}{p_0 + \Delta p} \quad (3-14)$$

となる。磁場もこの付近で展開すると、

$$B_0(r) = B_0(\rho) + \frac{\partial B_0}{\partial r}(r - \rho) + \dots \quad (3-15)$$

右辺第1項は偏向電磁石の磁場、第2項は4極電磁石の磁場勾配に対応する。

これにより式(3-14)は

$$\frac{d^2}{ds^2}r = x'' = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho} \right) - \frac{e}{p_0 + \Delta p} (B_0 + B'x + \dots + \Delta B) \quad (3-16)$$

となる。磁場に掛かる最初の項の逆数、 $\frac{p_0}{e} = B_0\rho$ を magnetic rigidity という。

ちなみに、この値を数値的に求めるには、

$$B_0\rho[Tm] = \frac{E[\text{GeV}]}{0.3} \quad (3-17)$$

という簡単な式がある。さて、 $\Delta p/p_0 = \delta$ とおき、 $\delta \ll 1$ を使うと、

$$\frac{1}{p_0 + \Delta p} = \frac{1}{p_0} \left(\frac{1}{1 + \delta} \right) \approx \frac{1}{p_0} (1 - \delta) \quad (3-18)$$

となる。偏向電磁石の項に対しては近似式を適用して展開し、4極電磁石の項は分母に δ を残したまま扱うことにすると、式(3-18)より、偏向電磁石の最初の項は向心力の最初の項とキャンセルされる。また、 $\Delta B\Delta p$ など高次の項は落とすことにする。展開して線形の項のみ整理すると、方程式は

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} - \frac{\delta}{\rho} - \frac{k}{1 + \delta} x - \frac{\Delta B}{B_0\rho} \quad (3-19)$$

となる。

ところで、微分方程式の一般論として

$$\ddot{y} = f(t)y + g(t) \quad (3-20)$$

の解は、 $y_s = f(t)y_s + g(t)$ を満たす適当な特別解と、 $\ddot{y}_h = f(t)y_h$ を満たす一般的な斉次解との和で書ける。すなわち、

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_h + y_s) = f(t)(y_h + y_s) + g(t) \quad (3-21)$$

である。

同様にして粒子の運動方程式を解くことを考える。加速器の場合、必ずしも綺麗に分離できるわけではないが、 $-\frac{\delta}{\rho}$ に対する特別解を $x_\delta = \eta\delta$ とし、 $-\frac{\Delta B}{B_0\rho}$ に

対する特別解を x_{COD} 、斉次解を x_β と書くと、解は

$$x = x_\beta + x_\delta + x_{\text{COD}} \quad (3-22)$$

で与えられ、これを方程式に代入すれば、斉次解はベータatron振動の方程式

$$x_{\beta}'' = -\frac{x_{\beta}}{\rho^2} - \frac{K}{1+\delta} x_{\beta} \quad (3-23)$$

となり、 $\frac{1}{1+\delta}$ は色収差を表す。最初の定数項に対する特別解は、分散関数

$$\eta'' = -\frac{\eta}{\rho^2} - K\eta - \frac{1}{\rho} \quad (3-24)$$

となり、最後の特別解が COD(closed orbit distortion)

$$x_{COD}'' = -\frac{x_{COD}}{\rho^2} - Kx_{COD} - \frac{\Delta B}{B_0\rho} \quad (3-25)$$

となる。ただし、線形項のみを考えるため、分散関数と COD の式では色収差項は省かれる。

これらの方程式を個別の電磁石に対して解く前に、まずは電磁石の磁場を考えることにする。

3.2 電磁石の磁場

この項では電磁石と磁場の関係について述べる。2次元のラプラス方程式で通常の偏向電磁石、4極、6極電磁石などの磁場を求めた後、実際の電磁石のギャップと磁場の関係について述べる。

3.2.1 2次元の場合

真空中では、 $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ なので、磁場はスカラーポテンシャル φ を使い、 $\vec{B} = \vec{\nabla} \varphi$ と書ける。スカラーポテンシャルはラプラス方程式

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3-26)$$

を満たす。

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta) \quad (3-27)$$

とおいて、変数分離する。

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta = -m^2 \Theta \\ \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \end{cases} \quad (3-28)$$

従って、上の式より

$$\Theta = e^{im\theta} \quad (3-29)$$

ここで、 $\theta \rightarrow \theta + \pi$ で不変なので、 m は整数である。下の式より

$$\begin{aligned} R &= ar^n + br^{-n} \quad n \neq 0 \\ R &= R \ln r + B \quad n = 0 \end{aligned} \quad (3-30)$$

ただし、原点で正則でなければいけないため、下の式や r^{-n} の項は不適當。よって、解は

$$\varphi = \sum_{n=1} r^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \quad (3-31)$$

となる。 A_n を nomal 成分、 B_n を skew 成分と呼ぶ。ポテンシャルを磁場に直すと、

$$B = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi \quad (3-32)$$

より、

$$\begin{aligned} B_r &= \sum_{n=1} nr^{n-1} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \\ B_\theta &= \sum_{n=1} nr^{n-1} (A_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta) \end{aligned} \quad (3-33)$$

となる。円筒座標からデカルト座標 x, y に変換するために、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3-34)$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

を使う。

$n=1$ の時が偏向電磁石成分で、

$$\begin{cases} B_x = B_1 \\ B_y = A_1 \end{cases} \quad (3-36)$$

skew は垂直偏向電磁石、nomal は普通の水平偏向電磁石である。

$n=2$ の時は 4 極電磁石成分で、

$$\begin{cases} B_x = 2r(A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta) \\ \quad = 2A_2 y + 2B_2 x \\ B_y = 2r(A_2 \cos \theta - B_2 \sin \theta) \\ \quad = 2A_2 x - 2B_2 y \end{cases} \quad (3-37)$$

$n=3$ が 6 極電磁石成分である。

$$\begin{cases} B_x = 3r^2(A_3 \sin 2\theta + B_3 \cos 2\theta) \\ \quad = 6A_3xy + 3B_3(x^2 - y^2) \\ B_y = 3r^2(A_3 \cos 2\theta - B_3 \sin 2\theta) \\ \quad = 3A_3(x^2 - y^2) - 6B_3xy \end{cases} \quad (3-38)$$

高次成分は、

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}} B_\theta \right) \Big|_{\theta=0} \\ B_n &= -\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}} B_\theta \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{n}} \end{aligned} \quad (3-39)$$

となる。

3.2.2 電磁石のギャップと磁場の強さ

電磁石のギャップと磁場の関係を求める。nomal 成分の一般の n 極電磁石の場合を考える。スカラーポテンシャルは

$$\varphi = Ar^n \sin n\theta \quad (3-40)$$

と書ける。ここで、アンペールの法則より、

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (3-41)$$

ただし、 \vec{j} は電流密度である。これを積分すると、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3-42)$$

磁場の線積分は、その積分経路内側を通る全電流に等しいということになる。

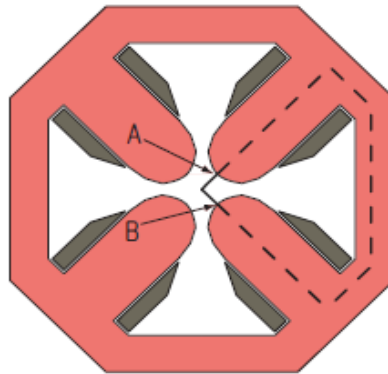


図 3.1 : 4 極電磁石の断面図

線積分を図 3.1 に示した経路上で計算する。真空中の透磁率を μ_0 、鉄心中を μ とすると、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \int_{A点}^{B点} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{\mu} \int_{B点}^{A点} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (3-43)$$

となるが、鉄心中では $\mu \rightarrow \infty$ と考え、空気中の透磁率は真空と等しいとする。鉄心内の積分はゼロ、ギャップ間の線積分は、式(3-31)で表わされるポテンシャルを使って、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} (\varphi(A) - \varphi(B)) \quad (3-44)$$

と書ける。断面を通る電流はコイルの電流値 $I[A]$ にコイルごとの巻数 N を掛けた値の 2 本分で、

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{s} = 2NI \quad (3-45)$$

となる。A 点では $\theta = \frac{\pi}{2n}$ 、B 点では $\theta = -\frac{\pi}{2n}$ であり、電磁石のボア径を $R[m]$

とすると、

$$\frac{1}{\mu_0} (\varphi(A) - \varphi(B)) = \frac{2AR^n}{\mu_0} = 2NI \quad (3-46)$$

となる。従って、

$$\varphi = \frac{\mu_0 NI}{R^n} r^n \sin n\theta \quad (3-47)$$

となり、磁場は、

$$\left. \frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}} B_\theta \right|_{\theta=0} = \frac{n! \mu_0 NI}{R^n} \quad (3-48)$$

となる。

例えば PF リングの偏向電磁石の場合、磁極の間隔は $2R = 70mm$ 、コイルは上下の合計で 48 ターン、電流は最大 1500A である。空気中の透磁率を真空中と等しい値

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m] \quad (3-49)$$

とすると、上の式より、磁場は約 1.3T となる。4 極電磁石の場合、ボア径は $R = 35mm$ 、コイルは磁極あたり 23 ターン、電流は最大 800A である。式に当てはめると、磁場勾配は約 38T/m となるが、実際には磁場に飽和が見られ、

30T/m 程度になる。現実の電磁石では磁極両端からビーム進行方向に離れていくに従い、磁場が緩やかに減衰する。端部の漏れ磁場というが、裾を引く距離はおよそ磁極ギャップと同じ程度である。計算値では電磁石中心の磁場の強さに磁極の長さを掛けるが、現実の電磁石では漏れ磁場の分だけ磁場(勾配)の積分値は大きくなる。一方、大電流の場合、現実の磁場は飽和が見られる。電磁石の磁場が鉄心によって強められるのは、鉄のスピンのそろうためであるが、揃いすぎてしまうとそれ以上磁場が強められなくなる。

3.3 転送行列

前項では方程式の解が包絡線と変調された振動で書けることを述べたが、具体的に包絡線や位相の進みなどは与えられていない。そこで、加速器では、要素ごとに方程式を解いて、行列の形にまとめ、それを掛け合わせて周回分の運動を求めるといった手法がとられる。要素(電磁石やドリフトスペース)毎に、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{出口}} = M_{\text{ある要素}} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{入口}} \quad (3-50)$$

なる行列を求め、それをその要素の転送行列という。全周の要素の転送行列を掛け合わせれば、入口の座標に対して周回後の座標が分かる(それが前項の M)。ただし、結局のところ、1周分どころか1セル分でも手計算では難しい。

転送行列を調べると、各要素内の粒子の運動だけでなく、ツイスパラメータ、すなわち、ビームサイズやチューンなど、さまざまなビームパラメータの変化が分かる。また、ある要素の強さを変えたときのビームの応答なども分かる。この項では、各要素の転送行列を実際に求める。

3.3.1 ドリフトスペース

電磁石などのない空間では、

$$x'' = 0 \quad (3-51)$$

となる。この方程式の解は、

$$x = As + B \quad (3-52)$$

であり、 A と B は積分定数である。転送行列を求めるためには、積分定数を初座標と初発散角で書かなければいけない。 $s = 0$ の時、 $x = x_0$ 、 $x' = x'_0$ とすると、 $x'(0) = A = x'_0$ 、 $x(0) = B = x_0$ 、すなわち $x(s) = x_0 + sx'_0$ 、 $x'(s) = x'_0$ となり、行列に直せば、垂直方向も含め、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad (3-53)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

となる。

分散関数についても同様に、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta'_0 \end{pmatrix} \quad (3-54)$$

である。

3.3.2 偏向電磁石

偏向電磁石中の粒子の運動方程式は、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} \quad (3-55)$$

解は

$$\begin{aligned} x &= A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \\ x' &= -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho} \end{aligned} \quad (3-56)$$

積分定数を初期条件に書き換えると、 $A = x_0$ 、 $B = \rho x'_0$ となる。従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_{bend} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-57)$$

となる。

なお、垂直方向については何も力が働かないため、ドリフトスペースと同じである。

分散関数の場合、方程式は

$$\eta'' = -\frac{\eta}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \quad (3-58)$$

となる。特別解は

$$\eta = \rho \quad (3-59)$$

斉次解は

$$\eta = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \quad (3-60)$$

である。足し合わせて一般解は

$$\eta = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} + \rho \quad (3-61)$$

$$\eta' = -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho}$$

となる。積分定数を初期条件に書き換えると、 $A = \eta_0 - \rho$ 、 $B = \rho \eta'_0$ 、従って、

$$\eta = \eta_0 \cos \frac{s}{\rho} + \rho \eta'_0 \sin \frac{s}{\rho} + \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) \quad (3-62)$$

$$\eta' = -\frac{\eta_0}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \eta'_0 \cos \frac{s}{\rho} + \sin \frac{s}{\rho}$$

となる。分散関数にエネルギーのずれを掛けたものが実際の軌道偏差になる。

実際の軌道偏差を行列で書けば、

$$\begin{pmatrix} \eta \delta \\ \eta' \delta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{bend} & \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) \\ 0 & \sin \frac{s}{\rho} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \delta \\ \eta'_0 \delta \\ \delta \end{pmatrix} \quad (3-63)$$

と書ける。

3.3.3 収束型 4 極電磁石

収束型 4 極電磁石の方程式は、 $K > 0$ として、

$$x'' = -Kx \quad (3-64)$$

である偏向電磁石と見比べ、 $\frac{1}{\rho} \rightarrow \sqrt{K}$ とすればよい。従って転送行列は

$$F = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K} s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} s \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{K} s & \cos \sqrt{K} s \end{pmatrix} \quad (3-65)$$

となる。分散関数についても転送行列は同じである。収束型 4 極電磁石内の垂直方向の運動方程式は $y'' = +Ky$ であり、これに対する解は次項で述べる発散型 4 極電磁石の水平方向の場合と等しい。

ここで、収束力 $KL = \frac{B'L}{B\rho} [\text{m}^{-1}]$ を保ったまま、電磁石の長さをゼロにする近似を

考える。そのような近似を薄レンズ近似という。 KL を露わに書いた転送行列は、

$$F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{KL} & L \frac{\sin\sqrt{KL}}{\sqrt{KL}} \\ -KL \frac{\sin\sqrt{KL}}{\sqrt{KL}} & \cos\sqrt{KL} \end{pmatrix} \quad (3-66)$$

であり、これで とすると、

$$F_{thin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -KL & 1 \end{pmatrix} \quad (3-67)$$

となる。

3.3.4 発散型 4 極電磁石

次に、発散型 4 極電磁石の方程式を考える。 $K > 0$ として、

$$x'' = Kx \quad (3-68)$$

上の式で $\sqrt{K} \rightarrow i\sqrt{K}$ と置き換える。

$$\cos i\theta = \cosh \theta \quad (3-69)$$

$$-i \sin i\theta = \sinh \theta$$

より、

$$D = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{K}s \\ \sqrt{K} \sinh \sqrt{K}s & \cosh \sqrt{K}s \end{pmatrix} \quad (3-70)$$

となる。分散関数についても同じである。薄レンズ近似では、

$$D_{thin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ KL & 1 \end{pmatrix} \quad (3-71)$$

となる。

ちなみに、方程式を解く時、解を

$$x = Ae^{\sqrt{K}s} + Be^{-\sqrt{K}s} \quad (3-72)$$

とおき、 $A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{x'_0}{\sqrt{K}} \right)$ 、 $B = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{x'_0}{\sqrt{K}} \right)$ から求めることもできる。

4 極電磁石について整理すると、

収束 4 極電磁石 :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (3-73)$$

発散型 4 極電磁石 :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (3-74)$$

となる。

3.3.5 矩形偏向電磁石

偏向電磁石は電子の軌道から考えると扇型(セクター(sector)型)が自然な形であるが、矩形(レクタングュラ(rectangular)型)の偏向電磁石も存在する。

偏向電磁石の転送行列を見ると、水平方向は収束4極電磁石と同じであり、水平方向には収束力として働いている。運動方程式から分かるが、向心力の分母における曲率半径の違いが収束力の源であり、すなわち、中心軌道の外側から偏向電磁石に入った粒子は電磁石内の軌道長が長く、内側から入ったら短い、軌道長が長いとより多く曲げられるために外側から内側へ向かって中心軌道に近付き、短いと曲げが足りないのでやはり粒子は内側から外側へ中心軌道に近付く。偏向電磁石が矩形の場合、この条件が崩れる。偏向電磁石端の、設計軌道の角度に対する角度を φ 、考える粒子の振幅を x 、偏向電磁石内の飛距離の減少分を Δl とすると、

$$\tan \varphi = \frac{\Delta l}{x} \quad (3-75)$$

従って、曲げ角の減少分は

$$\frac{\Delta l}{\rho} = \frac{x \tan \varphi}{\rho} \quad (3-76)$$

曲げ角減少分が振幅に比例するため、発散型4極電磁石と同じ効果となる。すなわち、

$$x' = x'_0 + \frac{x \tan \varphi}{\rho} \quad (3-77)$$

行列は、

$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varphi}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (3-78)$$

となる。水平には発散力であるが、この効果をエッジフォーカス(edge focus)という。

さて、扇型偏向電磁石内では垂直方向はドリフトスペースと同じであったが、

矩形電磁石の場合、電磁石端で垂直方向に収束力が生じる。扇型の場合、電磁石端の角度は軌道と垂直のため、漏れ磁場の方向はビーム進行方向 z と垂直方向 y のみとなり、水平方向成分はない。従って、垂直方向に力は働かない。矩形電磁石の場合、端の角度と粒子の進行方向が違うため、設計軌道に対して水平な地場成分があることになり、それは垂直方向の力となる。垂直方向の収束力の強さは、水平方向の発散力の強さと等しく、

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \varphi}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (3-79)$$

となる。エッジフォーカスという名前の由来は垂直方向の収束力であり、初期の加速器では、偶然の誤差によるものを含め、このエッジの力を使って垂直方向の収束力を得ていたためである。

なお、矩形という場合、端の角度は偏向電磁石の曲げ角を θ とすると $\frac{\theta}{2}$ 担っている場合が矩形である。端の収束力や発散力を生かすため、台形や逆向き台形の電磁石も存在する。

3.4 トUISパラメータとその性質

3.4.1 クーラン・シュナイダー不変量

ある粒子について、一般的な運動方程式、式(3-1)の解を求める。まず式(3-1)の斉次解は

$$x(s) = A(s) \cos(\sqrt{K(s)}) \quad (3-80)$$

である。 $A(s) = A\sqrt{\beta(s)}$, $\sqrt{K(s)} = \psi(s) - \psi_0$ とすると

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \quad (3-81)$$

となる。さらに x', x'' を求めると、

$$\begin{aligned}
x'(s) &= A \frac{\beta'(s)}{2\sqrt{\beta(s)}} \cos[\psi(s) - \psi_0] - A\sqrt{\beta(s)} \sin[\psi(s) - \psi_0] \psi'(s), \\
x''(s) &= A \frac{\beta(s)\beta''(s) - 1/2\beta'^2}{2\beta^{3/2}} \cos[\psi(s) - \psi_0] - A \frac{\beta'(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \sin[\psi(s) - \psi_0] \psi'(s) \\
&\quad - A\sqrt{\beta(s)} \sin[\psi(s) - \psi_0] \psi''(s) - A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \psi'^2(s)
\end{aligned} \tag{3-82}$$

となる。ここで出た x, x'' を式(3-1)に代入すると、 \cos の項と \sin の項の係数それぞれが 0 であるので、2 つの条件式が出てくる

$$\frac{1}{2} \left(\beta(s)\beta''(s) - \frac{1}{2}\beta'^2(s) \right) - \beta^2(s)\psi'^2(s) + \beta^2(s)K(s) = 0 \tag{3-83}$$

と

$$\beta'(s)\psi'(s) + \beta(s)\psi''(s) = 0 \tag{3-84}$$

である。式(3-84)から $\beta'(s)\psi'(s) + \beta(s)\psi''(s) = (\beta(s)\psi'(s))$ という関係式より

$$\beta(s)\psi'(s) = \text{const} = 1 \tag{3-85}$$

が得られる。ここで ψ の規格化として $\text{const} = 1$ を選んだ。 $\psi(s)$ は

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\beta(\tilde{s})} + \psi_0 \tag{3-86}$$

となる。式(3-83)に式(3-85)を代入すると

$$\frac{1}{2} \beta(s)\beta''(s) - \frac{1}{4} \beta'^2(s) + \beta^2(s)K(s) = 1 \tag{3-87}$$

が得られ、新たに $\alpha(s) = -1/2\beta'(s)$, $\gamma(s) = (1 + \alpha^2(s))/\beta(s)$ を定義すると式(3-87)は

$$\beta''(s) + 2K(s)\beta(s) - 2\gamma(s) = 0 \tag{3-88}$$

となる。ここで定義された $\beta(s)$, $\alpha(s)$, $\gamma(s)$ をトゥイスパラメータと呼ぶ。トゥイスパラメータを使うと、 x, x' は

$$\begin{aligned}
x(s) &= A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \\
x'(s) &= -A \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \cos[\psi(s) - \psi_0] - A \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \sin[\psi(s) - \psi_0]
\end{aligned} \tag{3-89}$$

と書ける。

ここで、位相 $\psi(s) - \psi_0$ を取り除き、不変量を得る式がある。式は

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = A^2 \tag{3-90}$$

で表わされる。この時出てくる A をクーラン・シュナイダー不変量

(Courant-Snyder invariant)と呼ぶ。この量はよく W 、 $2J$ 、 ε 等で表わされる。クーラン・シュナイダー不変量は位相空間上で粒子が囲む楕円の面積を π で割ったものに等しい。1 粒子はその楕円上に必ず位置するが、多粒子となるとそれぞれの粒子で A の値が異なり、様々な楕円を描く。この時、 A の 1 自由度あたりの期待値に相当する

$$\varepsilon = \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \quad (3-91)$$

をエミッタンスの定義とする。

3.4.2 規格化運動量と規格化座標

位相空間の楕円は、

$$\frac{1}{\beta}(x^2 + (\beta x' + \alpha x)^2) = A^2 \quad (3-92)$$

なので、

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \\ P &= \frac{\beta x' + \alpha x}{\sqrt{\beta}} \end{aligned} \quad (3-93)$$

と規格化すると、位相空間の楕円は円になる。また、ベータatron振動は、

$$\begin{aligned} X(s) &= A \cos(\psi(s) + \psi_0), \\ P(s) &= A \sin(\psi(s) + \psi_0) \end{aligned} \quad (3-94)$$

と書ける。

例えば、入射点では入射ビームの初期振幅 x はセプタムの壁と蓄積ビームのバンブによって幾何学的に決まるが、 x' についてはセプタムの蹴り角である程度の自由度がある。その場合、セプタムの蹴り角を調整し、 $\beta x' + \alpha x = 0$ を満たす蹴り角にすれば、 $P = 0$ となって入射ビームのベータatron振動の大きさは最小となる。

3.4.3 位相空間内の楕円の転送

粒子の集団としてのビーム全体は、位相空間の 1 本の楕円で表現できる。ドリフトスペースと 4 極電磁石による電磁石の転送について述べる。ドリフトスペースでは、粒子の発散角は変わらず、距離に比例して位置のみが変化してい

くため、楕円は右に伸びていく。薄レンズ近似の4極電磁石の場合、粒子の位置は変化せず、発散角のみが変化する。どちらの場合も楕円の面積は不変である。

理想的な場合の設計粒子に対する解析はここまでとし、次に、誤差や運動量偏差がある場合の扱いについて述べる。

3.5 運動量偏差による収束のずれと6極電磁石による補正

4極電磁石における粒子の運動方程式は

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (3-95)$$

として、

$$x'' = \frac{K}{1+\delta} x = (K - K\delta)x \quad (3-96)$$

と書ける。すなわち、運動量偏差に伴い、収束力が変化する。これは、収束型4極電磁石に対して弱い発散型4極を付け加え、発散型に対して弱い収束型を付け加えることと同じである。

運動量偏差による収束力の変化は、

$$\Delta K = -K\delta \quad (3-97)$$

である。これを補正するために6極電磁石を用いる。normalの6極電磁石の磁場は、 $A_3 = \frac{1}{6}B''$ として、

$$\begin{cases} B_x = 6A_3xy \\ B_y = 3A_3(x^2 - y^2) \end{cases} \quad (3-98)$$

と書ける。従って、運動方程式は $\lambda = \frac{B''}{2B_0\rho}$ として、

$$\begin{aligned} x'' &= -\lambda(x^2 - y^2) \\ y'' &= 2\lambda xy \end{aligned} \quad (3-99)$$

となる。分散関数のある場所に6極電磁石が置かれている場合、6極電磁石内の粒子の軌道は、

$$x = x_\beta + \eta\delta \quad (3-100)$$

となる。代入すると、

$$\begin{aligned} x''_{\beta} &= -\lambda((x_{\beta} + \eta\delta)^2 - y_{\beta}^2) \\ y''_{\beta} &= 2\lambda(x_{\beta} + \eta\delta)y_{\beta} \end{aligned} \tag{3-101}$$

展開して x_{β} 、 y_{β} について線形項のみ残すと、

$$\begin{aligned} x''_{\beta} &= -2\lambda\eta\delta x_{\beta} \\ y''_{\beta} &= 2\lambda\eta\delta y_{\beta} \end{aligned} \tag{3-102}$$

となる。6極電磁石が運動量偏差に比例した収束力として働くことが分かる。

3.6 分散による軌道長のずれ

粒子の中心軌道が設計軌道から変化すると、周回の軌道長も変化する。運動量がずれた粒子の軌道のずれは分散関数であるが、その軌道のずれによる軌道長変化を、モーメントムコンパクションという。

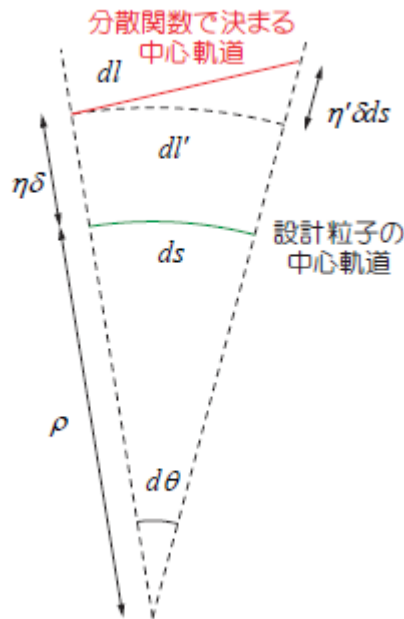


図 3.2 : 分散関数による軌道長の変化

曲率半径 ρ の無限小の長さの軌道上で、分散関数による軌道長の変化を求める (図 3.2)。設計粒子の軌道長は、

$$ds = \rho d\theta \tag{3-103}$$

である。分散関数による軌道の軌道長は、

$$\begin{aligned}
 dl &= \sqrt{(dl')^2 + (\eta'\delta ds)^2} \\
 &= \sqrt{(\rho + \eta\delta)^2 d\theta^2 + (\eta'\delta ds)^2} \\
 &= \sqrt{\left(1 + \frac{\eta\delta}{\rho}\right)^2 + (\eta'\delta)^2} ds \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\eta\delta}{\rho} + \frac{(\eta\delta)^2}{\rho^2} + (\eta'\delta)^2\right)\right) ds \\
 &\cong \left(1 + \frac{\eta\delta}{\rho}\right) ds
 \end{aligned} \tag{3-104}$$

従って、運動量に線形の変化は曲率半径の有限な部分、すなわち偏向電磁石内でのみ生じる。ある領域 S での軌道長変化 ΔC は、

$$\Delta C = R_{56}\delta, \quad R_{56} = \int_S \frac{\eta}{\rho} ds \tag{3-105}$$

となる。運動量偏差に対する周長偏差の比をとって、モーメントムコンパクションファクター(momentum compaction factor)は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta C}{C} &= \alpha \frac{\Delta p}{p_0} \\
 \alpha &= \frac{1}{C} \int \frac{\eta}{\rho} ds
 \end{aligned} \tag{3-106}$$

となる。

3.7 有効エミッタンスと規格化エミッタンス

有効エミッタンスの定義は[9]でなされていて、

$$\varepsilon_{eff}^2 = \langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2 \quad (3-107)$$

となっている。 x や x' が式(3-89)の場合

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2} \beta \langle A^2 \rangle = \beta \varepsilon \\ \langle x'^2 \rangle &= \frac{1}{2} \gamma \langle A^2 \rangle = \gamma \varepsilon \\ \langle xx' \rangle &= -\frac{1}{2} \alpha \langle A^2 \rangle = -\alpha \varepsilon \end{aligned} \quad (3-108)$$

となり、 $\varepsilon_{eff} = \varepsilon$ となる。しかし、ビームに運動量分散があると有効エミッタンスは変わる。分散関数がある時、粒子の運動は $x = x_\beta + x_\eta$, $x' = x'_\beta + x'_\eta$ となる。

ここで $x_\eta = \eta \delta$, $x'_\eta = \eta' \delta$, $\delta \equiv \Delta p / p$ とし、 $\langle \delta \rangle = 0$ とすると有効エミッタンスは

$$\varepsilon_{eff}^2 = (\beta \varepsilon + \eta^2 \sigma_p^2) (\gamma \varepsilon + \eta'^2 \sigma_p^2) - (\alpha \varepsilon + \eta \eta' \sigma_p^2)^2 \quad (3-109)$$

となる。

加減速がある時、発散角 $u' = p_u / p_z$ が p_z の変化に伴い発散角も変化し、エミッタンスが保存されなくなる。ここで、加減速があっても断熱的な場合に保存されるエミッタンスである規格化エミッタンス $\varepsilon_n = \gamma \beta \varepsilon_{eff}$ を定義する。加減速がある場合 ε_{eff} は

$$\varepsilon_{eff,f} = \frac{(\gamma \beta)_i}{(\gamma \beta)_f} \varepsilon_{eff,i} \quad (3-110)$$

となる。規格化エミッタンスは、6極磁場やCSRなどによる非線形項が強くなければエネルギーに依らず一定なので、通常（非規格化）エミッタンスはエネルギーに比例して小さくなる。従って、ERLではエネルギーが高いほどエミッタンスが小さくなり、そこからの放射光は高い輝度になる。一方、蓄積リングの中のビームは、何周も周回しているうちに発生する放射光によって放射平衡に達するために、全く異なるエネルギー依存性を示す。

4章 CSR について

4.1 はじめに

次世代放射光施設には、高輝度、サブピコ秒短パルス X 線の実現が期待されている。このような X 線を発生させるには、位置・角度広がり指標であるエミッタンスと呼ばれる量が小さく、短いバンチ長の電子ビームが必要不可欠である。しかし、従来の蓄積リング型放射光加速器には平衡状態が存在し、電子ビームのエミッタンスやバンチ長は加速器の仕様で制限されてきた。そこで ERL が注目を集めている。ERL では平衡状態が存在しないため、電子銃で作られた状態のビームを劣化させることなく輸送できることが最大の特徴である。従って、ERL によってこれまで以上の低エミッタンス・短バンチ電子ビームが実現する可能性がある。

短バンチ電子ビームから期待される物理にコヒーレントシンクロトロン放射光(Coherent Synchrotron Radiation, CSR)がある。CSR とは偏向電磁石などによって電子の軌道が曲げられたときに短バンチから発生するシンクロトロン放射光(SR)のうち、位相が揃っている成分のことを指す。この CSR はパワーが強く、コヒーレント性の高い放射光源として期待されている。バンチ長以上の波長でコヒーレント性が高くなるため、バンチ長が短いほど強い放射光となる。しかし、この短バンチ電子ビームによってこれまでになかったビームダイナミクスの問題が議論されるようになった。短いバンチが自ら発生した CSR によって摂動が加わってしまうのである。加速器物理ではこの摂動を wake(航跡場)と呼ぶ。wake とはチャンバーや加速空洞など、電子ビームを取り巻く環境によって電磁場に歪みが生じ、ビーム物理に影響を与えることを指す。通常の wake では先に通過した電子によって引き起こされ、後続の電子に摂動が与えられるが、CSR wake の場合はバンチ後方の電子が、バンチ先頭に影響を及ぼす。この影響によって、バンチ内のエネルギー分布や軌道が変化し、エミッタンスの増加やバンチ長の伸長などの悪影響を及ぼしてしまう。

4.2 コヒーレントシンクロトロン放射光(CSR)とインコヒーレントシンクロトロン放射光

ここでは、シンクロトロン放射光や CSR wake の解析解の導出に必要な不可欠な Liénard-Wiechert ポテンシャルの説明を行い、通常シンクロトロン放射光とコヒーレントシンクロトロン放射光の特徴について比較する。

4.2.1 Liénard-Wiechert ポテンシャル

まず、単位電荷量をもつ点電荷が位置 \mathbf{r}_0 で静止している場合を考える。すると、 \mathbf{r} におけるポテンシャルは

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4-1)$$

と表すことができる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率である。式(4-1)は \mathbf{r} と \mathbf{r}_0 のみで決定する関数であり、このようなある点の単位物理量が別の点に及ぼす場を表す関数をグリーン関数(Green function)と呼ぶ。加速器で扱う荷電粒子のように、光速に近い速度で運動している電荷量 e の点電荷 \mathbf{n} が作る電磁場は、運動の軌跡を $\mathbf{r}_n(t)$ と表すと Maxwell 方程式より

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))}{\epsilon_0} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 e \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \end{aligned} \quad (4-2)$$

という波動方程式を満たす。ここで μ_0 は真空の透磁率、 $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ の 3次元ベクトルであり、

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

である。式(4-2)を満たすグリーン関数は

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c} - (t - t_0)\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4-3)$$

となる。ここで、 c は光速であり、デルタ関数は $\int \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$ を満たすものとする。

る。因果律より $t_0 < t$ の領域を扱うところから遅延グリーン関数と呼ばれる。この遅延グリーン関数から導出されるポテンシャルを一般的に Liénard-Wiechert ポテンシャルと呼ぶ。式(4-2)を満たすスカラーポテンシャル $\Phi_n(\mathbf{r}, t)$ 、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t)$ の解は

$$\Phi_n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d\mathbf{r}_0 dt_0 e \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n(t_0)) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0),$$

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \mathbf{v}(t_0) e \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n(t_0)) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$$

と書き下すことができる。 $p = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c - (t - t_0)$ とおいて p に変数を変換して計

算すると、Liénard-Wiechert ポテンシャルは

$$\Phi_n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})| - \mathbf{v}(\bar{t}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t}))}, \quad (4-4)$$

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}(\bar{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})| - \mathbf{v}(\bar{t}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t}))}$$

と与えられる。 \bar{t} は遅延時間であり、方程式

$$t - \bar{t} = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})|}{c} \quad (4-5)$$

を満たす。ここで電荷分布 $\rho(\mathbf{r}, t)$ が与えられた場合は、全体のスカラーポテンシャル $\Phi(\mathbf{r}, t)$ およびベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は重ね合わせで求めることができ、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d\mathbf{r}_0 \rho(\mathbf{r}_0, t) \Phi_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \mathbf{v} \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \\ &= \mu_0 \int d\mathbf{r}_0 \rho(\mathbf{r}_0, t) \mathbf{A}_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t) \end{aligned}$$

となる。ここで、電荷分布 $\rho(\mathbf{r}, t)$ は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \quad (4-6)$$

と定義した。

4.2.2 シンクロトロン放射光

放射光強度の導出に関する概要を述べる。式(4-4)の Liénard-Wiechert ポテンシャルを簡単な表示にするために、 $L \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(\bar{t})|$ とし、法線ベクトル $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))/L$ を導入する。すると、

$$\begin{aligned}\Phi_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})L}, \\ \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}(\bar{t})}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})L}\end{aligned}\tag{4-7}$$

となる。このポテンシャルを元に数学的に処理を行うと、電場 \mathbf{E} は \mathbf{r} と t の関数で、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e(\mathbf{n} - \mathbf{v})}{\gamma^2(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^3 L^2} + \frac{e \mathbf{n} \times |(\mathbf{n} - \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}}|}{c(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^3 L} \right)\tag{4-8}$$

と書ける。ここで γ はローレンツ因子(Lorentz factor)と呼ばれる変数で、 $\gamma^2 \equiv 1/(1 - \beta^2)$ である。式(4-8)は加速度 $\dot{\mathbf{v}} \equiv d\mathbf{v}/dt$ が含まれないクーロン場(第1項)と、含む加速度依存の場(第2項)に分けている。通常、放射光源となる電子エネルギーでは $\gamma^{-2} \ll 1$ であるため第1項を無視する。

式(4-8)の第2項から、単位時間当たりの放射エネルギーを表す Larmor の公式を導くことができる。

$$P = \frac{2}{3} \frac{r_e}{mc} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)\tag{4-9}$$

ここで、 m および r_e はそれぞれ電子の質量および古典半径であり、運動量 \mathbf{p} は $\mathbf{p} \equiv \gamma m \boldsymbol{\beta}$ とする。これはローレンツ変換で不変な量である。 $\boldsymbol{\beta}$ を使って書きなおすと、

$$P_{SR} = \frac{2}{3} r_e mc \gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]\tag{4-10}$$

となる。偏向電磁石で加速された場合を想定すると、近似式は

$$P_{SR} = \frac{2}{3} \frac{r_e mc^3}{R^2} \beta^4 \gamma^4\tag{4-11}$$

となる。ここで、 R は軌道の曲率半径である。

放射光の角度広がりについて補足する。ここで、放射角度 θ_{rad} の広がり を $\langle \theta_{rad}^2 \rangle^{1/2}$ と定義する。これは放射光の周波数 ω によって異なり、臨界周波数 ω_c

に近い高い周波数では

$$\langle \theta_{rad}^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{1}{\gamma} \quad (4-12)$$

となるのに対し、 $\omega \ll \omega_c$ となる低い周波数では

$$\langle \theta_{rad}^2 \rangle^{1/2} \sim \left(\frac{3c}{\omega R} \right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{2\omega_c}{\omega} \right)^{1/3} \quad (4-13)$$

となる。ここで、臨界周波数 ω_c とは高い周波数の限界付近を指し、

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{R} \quad (4-14)$$

と定義される。これより高い周波数で放射光の強度は急激に小さくなる。式(4-13)は、より低い周波数では高い周波数に比べて $(2\omega_c/\omega)^{1/3}$ 倍も広い角度で放射することを意味する。

4.2.3 コヒーレントシンクロトロン放射光

バンチ長よりもシンクロトロン放射光の波長が長い場合は、それぞれの電子から放射する放射光の位相が揃うため、強度が桁違いに大きくなる。これは、バンチ長が短いほど高い周波数の放射光で位相が揃い、CSRのパワーが強くなることを意味する。バンチ長は有限であるためにすべての放射光の位相が完全に一致することはなく、部分的にコヒーレントとなる。この節では、そのコヒーレントな放射光とインコヒーレントな放射光の割合を示すフォームファクター(Form Factor)について説明する。

ここで、N個の電子からなるバンチを考える。簡単のために粒子の運動は進行方向の一次元で考え、各電子からの放射光のパワーは $P_{SR}(k)$ と等しく、位相だけが異なっているものとする。ある点から距離 z_n ($n=1, \dots, N$)だけ離れたN個の電子について位相を重ね合わせると、波数 k に対しては $\sum_{n=1}^N \exp(ikz_n)$ となる。

この位相からなる電場をそれぞれ位相 $\exp(ikz_n)$ の電子が感じる。すると、全体の放射光のパワー $P_{all}(k)$ は

$$P_{all}(k) = P_{SR}(k) \left| \sum_{n=1}^N \exp(ikz_n) \right|^2 \quad (4-15)$$

となる。展開すると、

$$P_{all}(k) = NP_{SR}(k) + \sum_{n \neq m}^N \exp[ik(z_n - z_m)] P_{SR}(k) \quad (4-16)$$

となる。ここで第2項は $n \neq m$ を満たす $N(N-1)$ 個の組み合わせについて和を取るものとする。式(4-16)の第1項は通常のインコヒーレントな放射光、そして第2項がコヒーレント放射光強度に相当する。ここで、フォームファクター $F(k)$ を定義する。粒子 N は非常に大きいと仮定し、 z と $z + dz$ の間に含まれる電子線密度 $\lambda(z)$ を導入して積分表示に変える。

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n \neq m}^N \exp[ik(z_n - z_m)] \\ &= \left[\int \lambda(z) \exp(ikz) dz \right]^2 \end{aligned} \quad (4-17)$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = 1 \quad (4-18)$$

である。このフォームファクター $F(k)$ を使って、全体の放射光のパワーは

$$P_{all}(k) = NP_{SR}(k) + N(N-1)F(k)P_{SR}(k) \quad (4-19)$$

と表すことができる。 $F(k)$ がコヒーレント放射光の割合を示すパラメータであることが分かるだろう。 N が十分大きいときは、 $P_{all}(k) \approx N^2 F(k) P_{SR}(k)$ となり、電子の2乗に比例する。通常、バンチ内の電子数は $10^9 \sim 10^{11}$ であるため、わずかな $F(k)$ でも放射光強度が大きく増幅される。

ここで、バンチ長 σ_z のガウス分布の場合を考えていく。電子線密度 $\lambda(z)$ は

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (4-20)$$

となる。フォームファクターは簡単に計算でき、

$$F(k) = \exp[-\sigma_z^2 k^2] \quad (4-21)$$

分散が $1/2\sigma_z^2$ のガウス分布になる。ガウス分布に対しては全体のエネルギー損失

$P_{all} = \int P_{all}(k) dk$ についても解析的に解くことができ、

$$P_{all} = NP_{SR} + N(N-1)P_{SR} T\left(\frac{3\sigma_z \gamma^3}{2R\beta}\right) \quad (4-22)$$

となる。ここで、

$$T(a) \equiv \frac{9}{32\sqrt{\pi}a^3} \exp\left(\frac{1}{8a^2}\right) K_{5/6}\left(\frac{1}{8a^2}\right) - \frac{9}{16a^2} \quad (4-23)$$

である。ここで、 $K_{5/6}$ は変形ベッセル関数である。式(4-22)と(4-23)を用いて、

飛行距離 L のバンチ全体のエネルギー変化 ΔE は

$$\Delta E \approx -N^2 r_e m c^2 \frac{\Gamma(5/6)}{6^{1/3} \sqrt{\pi}} \frac{L}{(R^2 \sigma_z^4)^{1/3}} \quad (4-24)$$

と近似できる。ここで、 $\Gamma(5/6)$ はガンマ関数である。

放射光の角度広がりについて補足する。ここで、サブ GeV 以上の電子エネルギーでバンチ長がサブピコ秒程度の場合を考える。すると、CSR の波長は短くても波長がバンチ長程度であり、 c/ω_c よりも十分長く、インコヒーレントの放射光に比べて放射角度が大きい。式(4-13)より、バンチ長 σ_z 程度の波長の CSR の放射角度は

$$\langle \theta_{rad}^2 \rangle^{1/2} \sim \left(\frac{3\sigma_z}{R} \right)^{1/3} \quad (4-25)$$

となる。

通常の放射光によるエネルギー損失とは異なり、コヒーレント放射光によるエネルギー損失は電子のエネルギーではなく、主にバンチ長に依存する。蓄積リングのバンチ長は短い場合でも数ピコ秒であるため、サブ GeV クラスでは CSR の波長は c/ω_c に比べて長くエネルギーが低いため無視できる。しかし、低エネルギークラスにおいては、通常の放射光によるエネルギー損失に加えて、CSR によるエネルギー損失が数十倍になるという計算結果が出ている。

このコヒーレント放射光は東北大学のライナックで世界で初めて観測に成功しており、その後、数多くの蓄積リングにも数ピコ秒の短いバンチ長の電子ビームの蓄積に成功し、CSR が観測されたことが報告されている。

4.3 CSR の電子バンチに及ぼす影響

バンチからの CSR はどのような影響をビームに与えるのか。4.2 節で、CSR が発生することによってバンチ全体のエネルギーが減少することを述べた。そのほかに、自ら放射した CSR によって進行方向のエネルギー分布をゆがめる影響があり、このインピーダンスについて Warnock が解析解を導出した。エネルギー分布の変化はエミッタンスの増大やバンチ長の伸長などを引き起こす原因となるため、ここで説明していく。エネルギー変化を解析的に解く方法はいくつか報告されているが、ここでは Derbenev の方法を紹介する。

4.3.1 相互作用ハミルトニアンとローレンツ力

電場の中を運動する電子のローレンツ変換で不変なハミルトニアン H は

$$H = \sqrt{c^2(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + m^2c^4} + e\Phi \quad (4-26)$$

ここで、 \mathbf{P} は共役な正準運動量で $\mathbf{P} = \gamma m \frac{d\mathbf{r}}{dt} + e\mathbf{A}$ である。電磁場と電子の相互作用

を扱うには、式(4-26)のうち相互作用の部分のみを抜き出せばよい。ローレンツ不変な相互作用ハミルトニアン H_{int} は

$$H_{\text{int}} = e(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (4-27)$$

となる。

次に個々の電子に及ぼす力、ローレンツ力 \mathbf{F} を求める。

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4-28)$$

となる。これをスカラー・ベクトルポテンシャルから導出するには、公式

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4-29)$$

を用いる。Frenet-Serret 座標系において、 \mathbf{A} 及び ∇ は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_s \mathbf{e}_s \\ \nabla &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{1 + \kappa x} \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned}$$

と定義される。 κ は軌道の曲率半径 R の逆数、すなわち $\kappa \equiv 1/R$ であり、 \mathbf{e}_s 及び \mathbf{e}_x の微分は

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{ds} = -\kappa \mathbf{e}_x, \quad \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \kappa \mathbf{e}_s \quad (4-30)$$

となる。

理想的には電子は (x, s) 平面上の軌道をたどるため、 A_y は無視する。すると、

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \\
E_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \\
E_s &= -\frac{1}{1+\kappa x} \frac{\partial\Phi}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial t} \\
B_x &= \frac{\partial A_s}{\partial y} \\
B_y &= \frac{1}{1+\kappa x} \frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} - \frac{\kappa}{1+\kappa x} A_s \\
B_s &= -\frac{\partial A_x}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4-31}$$

ここで式(4-27)の相互作用ハミルトニアン H_{int} を用いてローレンツ力を求めると、

$$\begin{aligned}
F_y &= -\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial y} = -e \frac{\partial}{\partial y} (\Phi - v_s A_s - v_x A_x) \\
F_x &= -\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial x} - e \frac{dA_x}{dt} + e \frac{\kappa A_s}{1+\kappa x} \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial t} - e \frac{d\Phi}{dt}
\end{aligned} \tag{4-32}$$

となる。ここで $\frac{d\varepsilon}{dt}$ は微小時間当たりのエネルギーの変化量である。これらの式

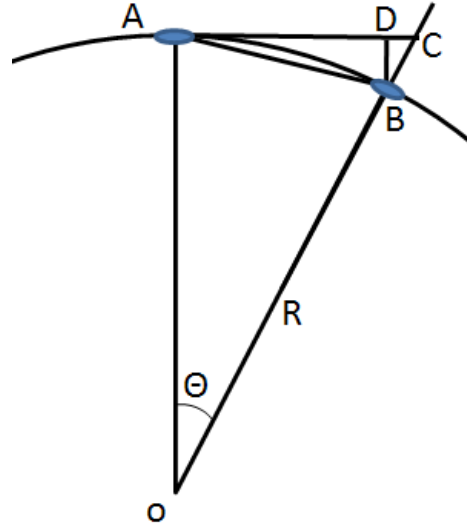
は微小な項を無視することによって、

$$F_y \approx -\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial y}, F_x \approx -\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial x}, \frac{d\varepsilon}{dt} \approx \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial t} \tag{4-33}$$

とすることができる。

4.3.2 CSR の影響によるエネルギー分布と軌道の変化

サブピコ秒程度のバンチ長から出る CSR の放射角度は式(4-25)で示したように広いため、CSR の一部は曲線を描くバンチに追いつく。その結果、バンチ内の電子が感じる電磁場は直線運動の場合と異なり、これがエネルギー分布や軌道の変化を引き起こす。本節では、スカラーポテンシャル Φ 及びベクトルポテンシャル \mathbf{A} から電磁場を求め、バンチに及ぼすローレンツ力やエネルギー分布の変化について解析解を導出する。



図の中で曲線 \widehat{AB} がバンチの軌道、直線 AB が CSR の進路である。軌道の曲率半径 R で偏向角度 Θ が 1 より十分小さい場合、点 B におけるバンチと CSR の光路差 \tilde{z} は

$$\tilde{z} = \widehat{AB} - |AB| = R\Theta - 2R \sin(\Theta/2) \approx \frac{\Theta^3 R}{24} \quad (4-34)$$

と近似できる。これは、電子が B にたどり着いたとき、 \tilde{z} だけ後方にある電子からの CSR の影響を受けることを意味する。光路差 \tilde{z} を追いつき距離とも呼ぶ。

4.2.1 節の結果を用いて、この場合の Liénard-Wiechert ポテンシャルを求める。ここでは、バンチの横方向の広がり σ_{\perp} はバンチ長 σ_z に比べて十分小さく、チャンバーによる遮蔽効果がない場合を考える。この条件を式に書き下すと、

$$\sigma_z \gg \sigma_{\perp} \sqrt{\sigma_{\perp} / R} \quad (4-35)$$

$$\sigma_z \ll h \sqrt{h / R} \quad (4-36)$$

ここで、 h はチャンバーの断面サイズである。

実際には CSR wake に遮蔽効果が存在するが、バンチ長に相当する波長の CSR を抑える場合、ダクトの高さ h (full) が

$$h \ll (2/3)^{1/3} \pi R^{1/3} \sigma_z^{2/3} \quad (4-37)$$

を満たさなければならない[1]。今回コンパクト ERL では $R = 1 \text{ m}$ で設計されているので、バンチ長 1 ps とした場合 $h \ll 12 \text{ mm}$ となる。コンパクト ERL では $h = 50 \text{ mm}$ で設計が考えられているため遮蔽効果はないものとして考えていく。式(4-35)の右辺は $x = \sigma_{\perp}$ と $-\sigma_{\perp}$ からの CSR の光路長の差である。ここで、新しい変数 τ を

$$\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c \quad (4-38)$$

と導入すると、式(4-4)は

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}_0 \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t - \tau)}{c\tau}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}_0 \frac{\mathbf{v}\rho(\mathbf{r}_0, t - \tau)}{c\tau} \end{aligned} \quad (4-39)$$

と書きかえることができる。軌道の曲率半径 R が一定であるときは、新しい変数 $\xi \equiv s - s_0 = R\theta$ を導入して、

$$c\tau = \left[(R+x)^2 + (R+x_0)^2 - 2(R+x)(R+x_0)\cos\frac{\xi}{R} + (y-y_0)^2 \right]^{1/2} \quad (4-40)$$

となり、変数 ξ を書き直すと

$$c\tau \approx \left| \xi - \frac{\xi^3}{24R^2} + \frac{\xi}{2R}(x+x_0) + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\xi} \right| \quad (4-41)$$

となる。4.3.1 節の結果より、ここで $x_0 = 0$ 、 $y_0 = 0$ における相互作用ハミルトニアン H_{int} を求める。ここで、 $\xi < 0$ の積分、 γ^{-2} に比例するクーロン場は無視する。すると、

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(x, y, s, t) &= Nr_e mc^2 \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{2R^2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{2R}x + \frac{x^2 + y^2}{2\xi} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{4R^2} x^2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right] \lambda \left(s - \beta ct - \frac{\xi^3}{24R^2} \right) \end{aligned}$$

ここで、3次元の電子分布 $\rho(z)$ を線密度分布 $\lambda(z)$ で近似した。 $\int \lambda(z) dz = 1$ である。

式(4-34)より $\tilde{z} = \xi^3/24R^2$ であり、Frenet-Serret 座標系の定義より、 $z = s - \beta ct$ 、 $d\xi = ds = (1 + \kappa)dz$ である。最後の項の 2 階偏微分を部分積分で 1 階偏微分にして計算すると、相互ハミルトニアン $H_{\text{int}}(x, y, z, t)$ は

$$H_{\text{int}} = U(z)(1 + \kappa x) - F_0(z)x + \frac{1}{2}g(z)(3x^2 + y^2) \quad (4-42)$$

と求まる。すると、

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \frac{2Nr_e mc^2}{(3R^2)^{1/3}} \int_0^\infty \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}^{1/3}} \lambda(z - \tilde{z}) \\
 F_0(z) &= -\frac{2Nr_e mc^2}{R} \lambda(z) \\
 g(z) &= \frac{Nr_e mc^2}{(3R^2)^{2/3}} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}^{2/3}} \lambda(z - \tilde{z})
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

式(4-33)及び式(4-43)を代入してエネルギー変化、水平・垂直方向のローレンツ力について最終的な式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon}{ds} &= \frac{d\varepsilon}{cdt} = -\frac{\partial}{\partial z} U(z) \\
 F_x(z) &= F_0(z) - 3g(z)x \\
 F_y(z) &= -g(z)y
 \end{aligned} \tag{4-44}$$

$\partial U(z)/\partial z$ はエネルギー変化、 $F_0(z)$ は水平方向の収束力、 $g(z)$ は水平・垂直方向の多次元の収束力が新たに加えられることを意味する。すなわちエネルギー変化は

$$\frac{d\varepsilon}{cdt} = -\frac{2Nr_e mc^2}{3^{1/3} R^{2/3}} \int_{-\infty}^z \frac{dz'}{(z-z')^{1/3}} \frac{d\lambda(z')}{dz'} \tag{4-45}$$

となる。この進行方向の wake 関数 $W'_0(z)$ を

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = Nr_e mc^2 \int_{-\infty}^x W'_0(z-z') \lambda(z') dz' \tag{4-46}$$

と定義すると、CSR の wake 関数については

$$W'_0(z) = -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{z^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} \tag{4-47}$$

となる。

ここで、全体のエネルギー変化量及びエネルギー変化量の広がりを求めることは容易である。式(4-46)の $d\varepsilon/ds$ を z について積分すると、全体のエネルギー変化 P_{CSR} を得ることができる。

$$\begin{aligned}
 P_{CSR} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{d\varepsilon(z)}{cdt} \lambda(z) dz \\
 &= -\frac{2N^2 r_e mc^2}{3^{4/3} R^{2/3}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^{4/3}} [\Lambda(0) - \Lambda(\zeta)] \\
 \Lambda(\zeta) &= \int_{-\infty}^\infty dz \lambda(z) \lambda(z - \zeta)
 \end{aligned} \tag{4-48}$$

となる。フーリエ変換することによって積分表示は簡単にすることができ、

$$P_{CSR} = -\frac{8\pi C_0 N^2 r_e mc^2}{3^{4/3} R^{2/3}} \int_0^\infty |\lambda(k)|^2 k^{1/3} dk \quad (4-49)$$

ここで、 $\lambda(k)$ は $\lambda(z)$ のフーリエ関数であり、

$$\lambda(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \lambda(z) e^{-ikz} dz \quad (4-50)$$

である。式(4-49)の導出には

$$C_0 = \int_0^\infty (1 - \cos \zeta) \zeta^{-4/3} d\zeta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Gamma(2/3) \quad (4-51)$$

を用いた。CSRによるエネルギーの広がり $\sigma_{E_{CSR}}$ は

$$\sigma_{E_{CSR}}^2 = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{d\varepsilon(z)}{cdt} \lambda(z) \right)^2 dz - \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varepsilon(z)}{cdt} \lambda(z) dz \right)^2 \quad (4-52)$$

で得ることができる。

電荷線密度分布が分散 σ_z^2 のガウス分布であるバンチについて具体的な関数を求める。 $\lambda(z)$ が

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp(-z^2/2\sigma_z^2) \quad (4-53)$$

と与えられたとする。式(4-43)と式(4-44)より、エネルギー変化及び水平・垂直方向の摂動は

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{ds} &= -\frac{2Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(3R^2\sigma_z^4)^{1/3}} I_0(z/\sigma_z) \\ F_x(z) &= -\frac{2Nr_e mc^2}{R} \lambda(z) - x \frac{3Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(9R^4\sigma_z^5)^{1/3}} I_1(z/\sigma_z) \\ F_y(z) &= -y \frac{Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(9R^4\sigma_z^5)^{1/3}} I_1(z/\sigma_z) \end{aligned} \quad (4-54)$$

となる。式(4-54)に現れる $I_0(x)$ と $I_1(x)$ についてのプロットを図 4.1 に示す。

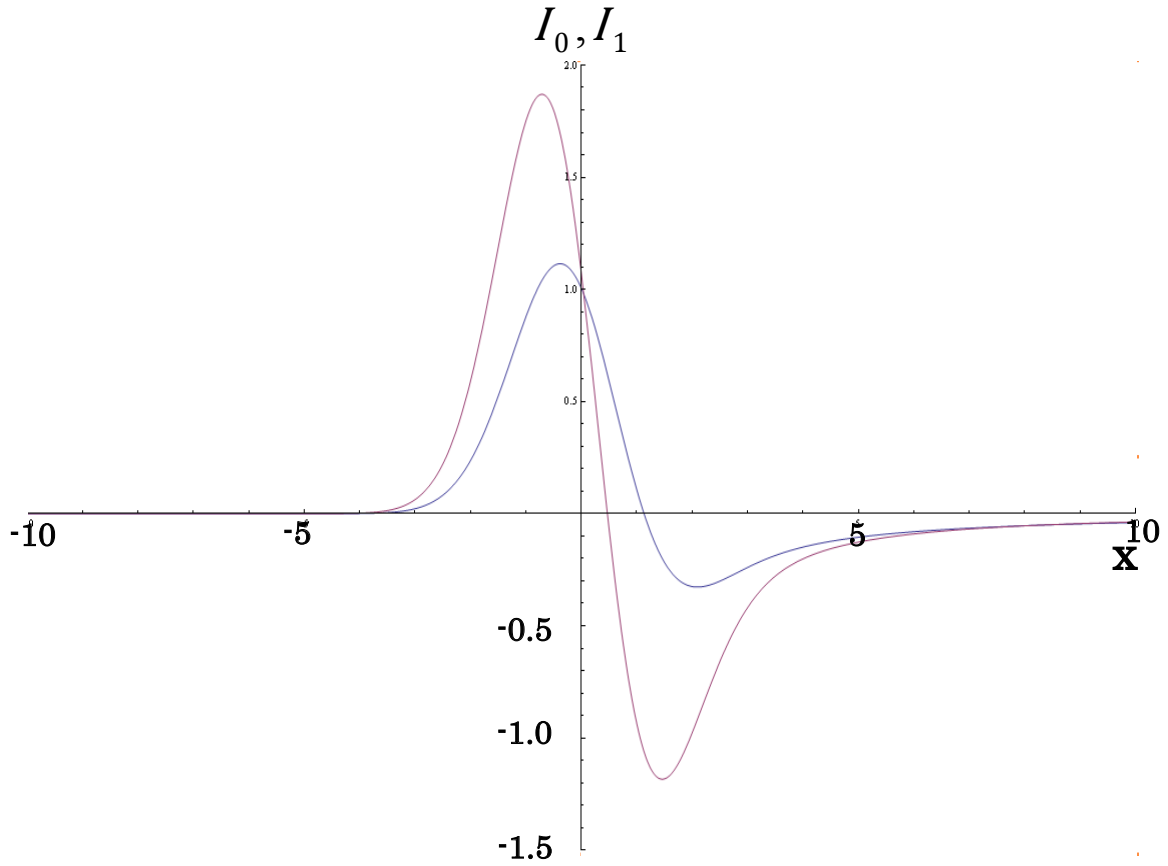


図 4.1 : 青線が $I_0(x)$ 、紫線が $I_1(x)$

$I_0(x)$ のプロファイルから、バンチ前方の電子でエネルギーが増加する一方で、バンチ中央付近で大きなエネルギー損失があることが分かる。 $I_0(x)$ 及び $I_1(x)$ の詳しい積分表示は

$$\begin{aligned}
 I_0(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{(x-x')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial x'} e^{-x'^2/2} \\
 I_1(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{(x-x')^{2/3}} \frac{\partial}{\partial x'} e^{-x'^2/2}
 \end{aligned}
 \tag{4-55}$$

となる。バンチ全体のエネルギーの変化量は式(4-49)より

$$P_{CSR} = -\frac{N^2 r_e m c^2}{R^{2/3} \sigma_z^{4/3}} \frac{3^{1/6} [\Gamma(2/3)]^2}{2\pi}
 \tag{4-56}$$

となり、減少していることが分かる。これは、別に導出した式(4-24)と一致する。

ここで、偏向電磁石の長さを L としたとき、エネルギー変化量の広がり $\sigma_{E_{CSR}}$ は式(4-52)を用いると、

$$\begin{aligned}\sigma_{E_{CSR}} &= \frac{2Nr_e mc^2 L}{3^{1/3} \sqrt{2\pi} (R\sigma_z^2)^{2/3}} \sqrt{\langle I_0^2 \rangle - \langle I_0 \rangle^2} \\ &\approx 0.22 \frac{Nr_e mc^2 L}{(R\sigma_z^2)^{2/3}}\end{aligned}\quad (4-57)$$

となる。ここで $E_0 \approx \gamma mc^2$ として式(4-57)を E_0 で割り $eN = Q$ を使うとエネルギーの偏差の RMS は

$$\frac{\sigma_{E_{CSR}}}{E_0} \approx 0.22 \frac{Qr_e L}{e\gamma (R\sigma_z^2)^{2/3}}\quad (4-58)$$

となる。加速後の電子の運動ではエネルギー偏差と運動量偏差がほぼ等しいとみなせるので、運動量の偏差 $\delta \equiv (p - p_0)/p_0$ の RMS は

$$\delta_{rms} \approx \frac{\sigma_{E_{CSR}}}{E_0} \approx 0.22 \frac{Qr_e L}{e\gamma (R\sigma_z^2)^{2/3}}\quad (4-59)$$

となる。

5章 光学系の設計方針

2章にもあるが、もう1度図5.1にコンパクト ERL の配置図を示す。

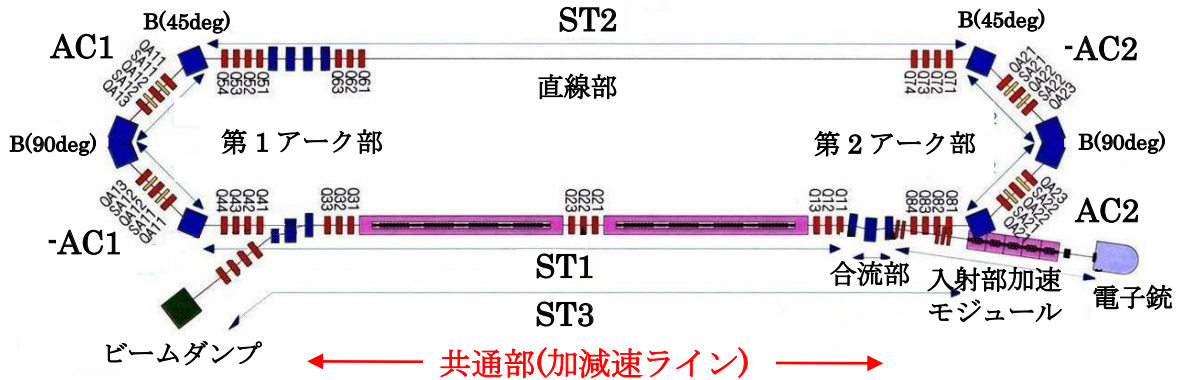


図 5.1 : コンパクト ERL の配置図
(B:偏向電磁石、Q:4 極電磁石、S:6 極電磁石)

今回行ったシミュレーションは、合流部を出た直後の 4 極電磁石 Q11 から始まり、ST1(合流部出口から第 1 アーク部入口まで)、-AC1(第 1 アーク部前半)、AC1(第 1 アーク部後半)、ST2(直線部)、-AC2(第 2 アーク部前半)、AC2(第 2 アーク部後半)、ST3(第 2 アーク部出口からダンプまで)と進みダンプへ辿り着くところまでである。それぞれのラインの長さは、ST1 が 21.94 m、AC1、AC2 が 3.31 m、ST2、ST3 が 26.08 m となっている。アーク部の偏向電磁石は全て曲率半径 $\rho=1\text{m}$ で、曲げ角 45° が 2 台と 90° が 1 台で構成されている。電子ビーム光学系の設計は以下の手順に従って行う。

1. 各モード(大電流モード、低エミッタンスモード、バンチ圧縮モード)に対応して、(3-105)で定義されている R_{56} をアーク部で最適に設定する。分散関数はアーク部内でのみ値を持ち、他の場所では分散関数とその微分が 0 となるように設計する。
2. 主加速モジュールのある共通部の 4 極電磁石を影響の大きい低いエネルギーに合わせて最適化を行う。つまり、最初の共通部の通過では Q11~13 でビームが低エネルギーなので、Q11~13、Q21~23 を使って光学系を設計し、Q31~33 はこの時点では使用しない。周回部を回った後では Q31~33

で低エネルギーなので、**Q31~33** によって光学系を設計する。その際、**Q31~33** の設定によって周回部を周る前の光学系が変化するが、ビームのエネルギーが高いのでその影響は小さくてすむ。

3. 共通部やアーク部以外の部分での 4 極電磁石の値設定を行う。まずはリニアオプティクスにおけるベータトロン関数が小さく抑えられるように設計を行う。
4. その後、バンチ圧縮モードでは第 1 アーク部通過後の直線部 **ST2** で最短となるように主にアーク部の 6 極電磁石で設計を行う。
5. 必要に応じてビームロスを避けるためにビームサイズを 4 極電磁石や減速空洞の位相の調整によって小さくする。

6章 大電流モードの電子ビーム光学系の設計

6.1 大電流モードについて

大電流モードとは、大電流 100 mA クラスを目指した設計である。100 mA は蓄積リング型光源と同程度の電流値であるが、ERL では同電流の蓄積リングに比べて規格化エミッタンスやバンチ長が小さくなり得る。

6.2 シミュレーション結果

6.2.1 初期バンチ長 1ps におけるシミュレーション

大電流モードにおいて表 6.1 の初期パラメータでシミュレーションを行った。

表 6.1 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電流	100 [mA]
電子の入射エネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	-1.1 [°]
R_{56}	0

繰り返し 1.3 GHz でビームを回すのでバンチの電荷 77 pC で 100 mA となる。大電流モードではバンチ圧縮を行わないので $R_{56} = 0$ とする。バンチと加速電場の速度差を考慮に入れると、加速位相のずれ角が -1.1° で加速エネルギーの進

行方向での傾斜が最小になる。 0° にするとバンチが後方にずれ、傾斜を持つ形となる。まずリニアオプティクス計算を行った。ラティスの配置、ベータatron関数、分散関数をそれぞれ図 6.1~図 6.3 に示す。

CSR 効果を入れなかった場合の結果を図 6.4、図 6.5 示す。図 6.4 は(t,z)の電子分布を初期、第 1 アーク通過後、減速後の各点を追ったもので、図 6.5 はバンチ長と運動量偏差を軌道に沿って追ったものである。図 6.4、図 6.5 から分かるように CSR が無い場合はほぼ初期のバンチ形状に戻る結果となった。図 6.4(b)のバンチ形状は加速電場の形状を反映している。次に、磁極の強さや加速位相のずれ、 R_{56} 等を変えず全く同じ条件で CSR ありにてシミュレーションを行った結果を図 6.6、図 6.7 に示す。図 6.6、図 6.7 から分かるように、CSR の効果を入れることによって進行方向のバンチ形状に大きな変化が現れる。バンチの前方は後方の CSR を受けエネルギーが上昇し、バンチの後方は CSR を放出し、受け取ることがないのでエネルギーが減少する。この CSR によるエネルギーのずれが、減速後に大きな運動量偏差を発生させ、この運動量偏差より各電子の速度に差が生じバンチ長が伸びる。また、この場合におけるビームサイズと規格化エミッタンス（アーク部では分散関数がゼロではないので、規格化された有効エミッタンスを表す）はそれぞれ図 6.8 と図 6.9 のようになる。ビームサイズについてはダンプ付近に一番大きいところで 4 mm(rms) である。規格化エミッタンスは第 1 アーク部を抜けた場所で初期の 2 倍ほどの値となっている。水平方向のビームサイズが最も大きくなっている場所の(x,y)プロットを図 6.10 に示す。コンパクト ERL では半径 25 mm 程度のアパーチャー(真空ダスト径)が現在想定されているので、ほとんどビームロスがなくビームを回すことができることが分かる。

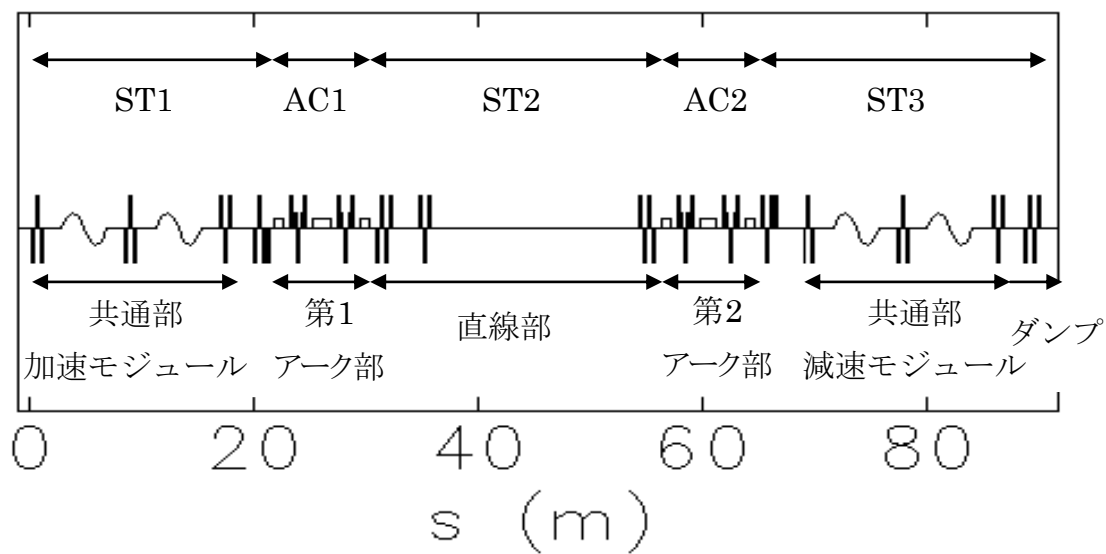


図 6.1: ラティスの配置

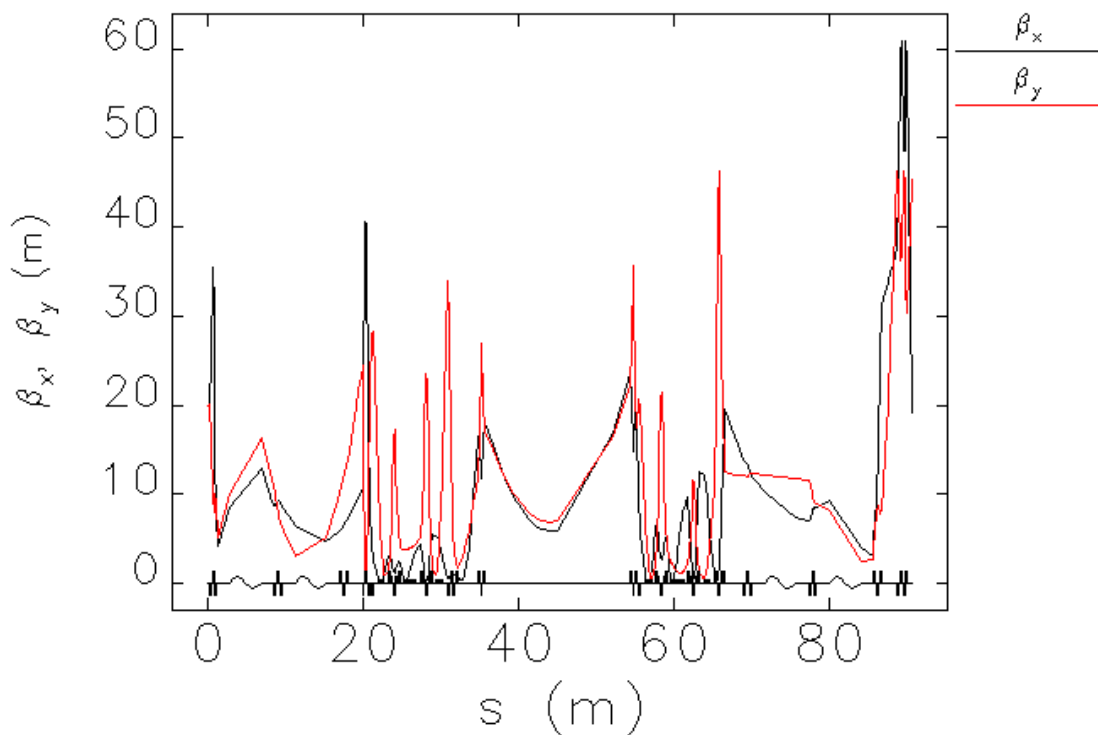


図 6.2: リニアオプティクスのパラメータのベータトロン関数

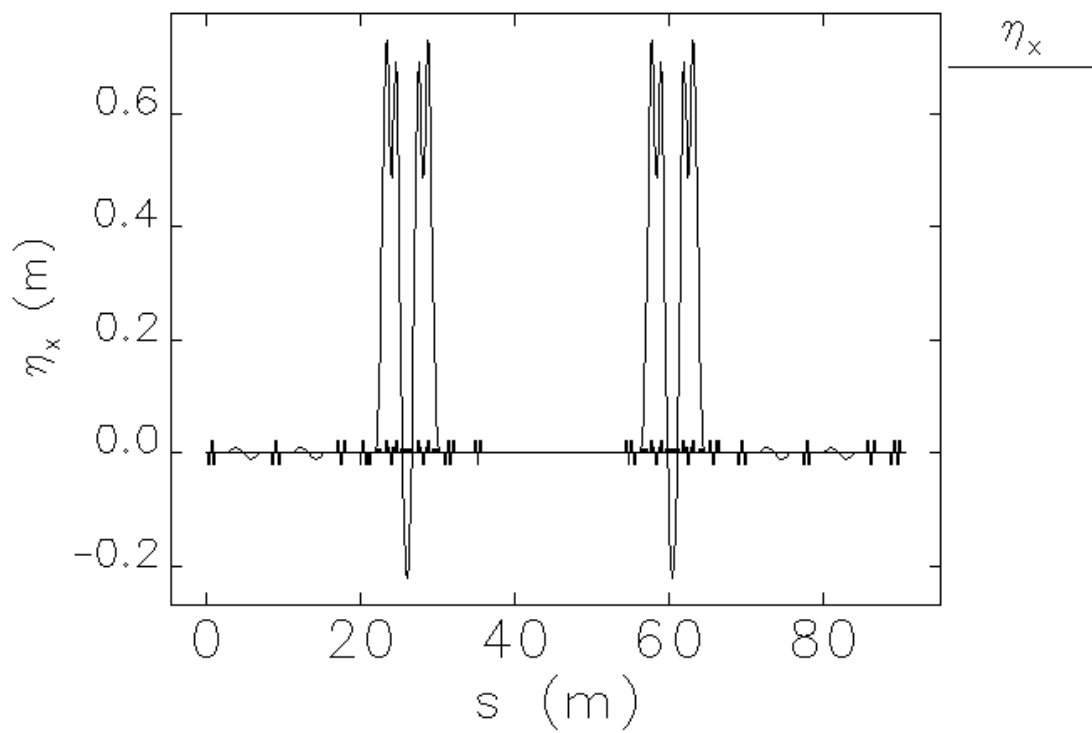


図 6.3 : リニアオプティクス分散関数

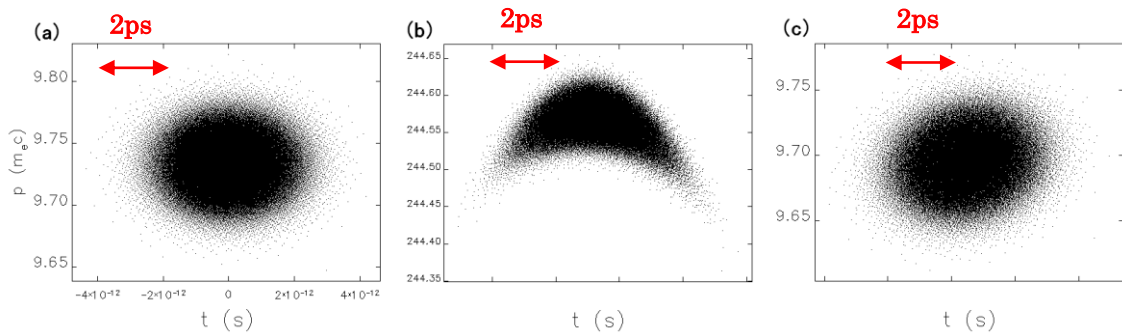


図 6.4 : CSR なし、初期バンチ長 1 ps のときの (t,p) のバンチ形状。

ここで y 軸の $p(m_e c)$ は電子エネルギーの $\beta\gamma$ 表示で、 $9.733[m_e c]=4.97[\text{MeV}]$ である。

(a):初期、(b):第 1 アーク部通過後、(c):減速後

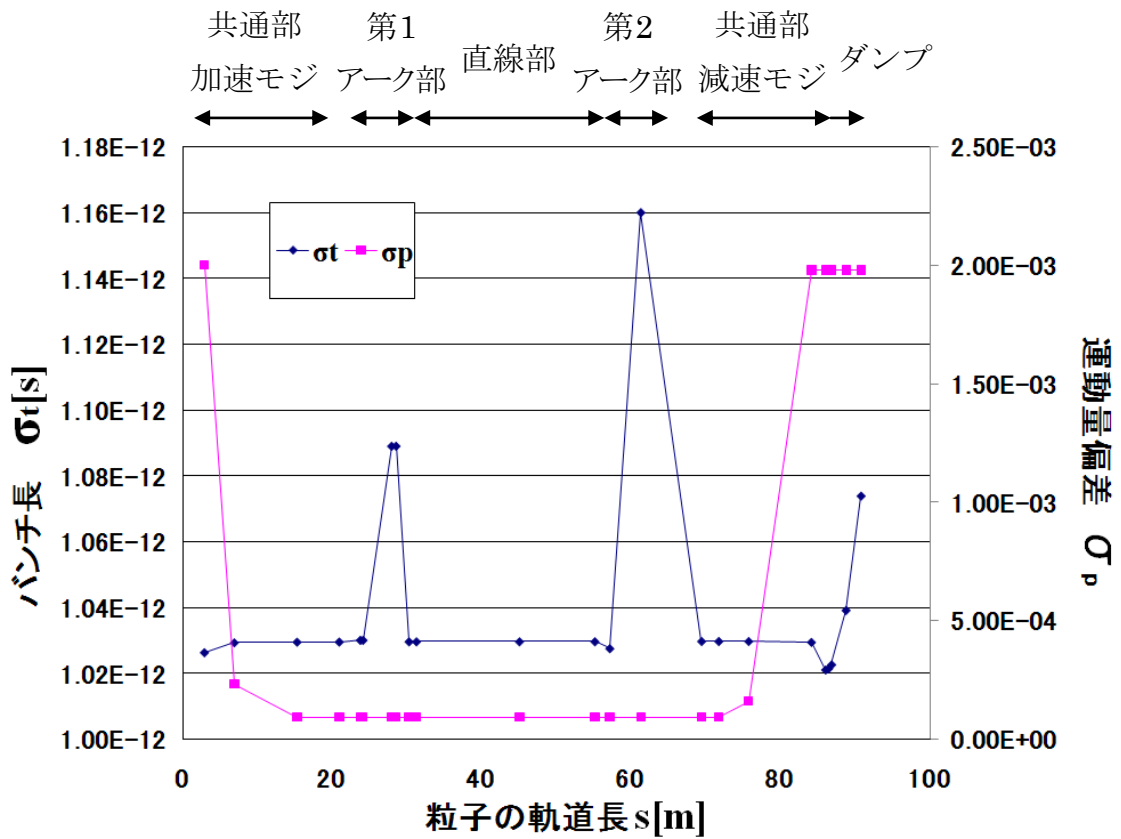


図 6.5 : CSR なし、初期バンチ長 1 ps の時のバンチ長と運動量偏差

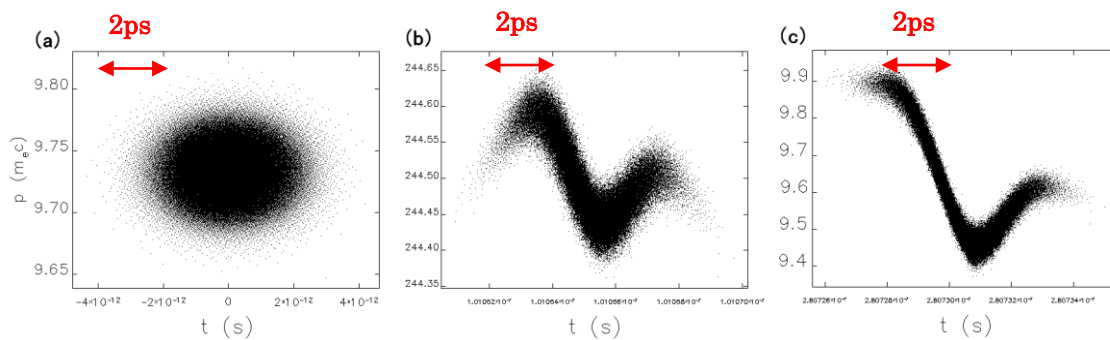


図 6.6 : CSR あり、初期バンチ長 1 ps の時の (t,p) のバンチ形状。

(a):初期、(b):第 1 アーク部通過後、(c):減速後

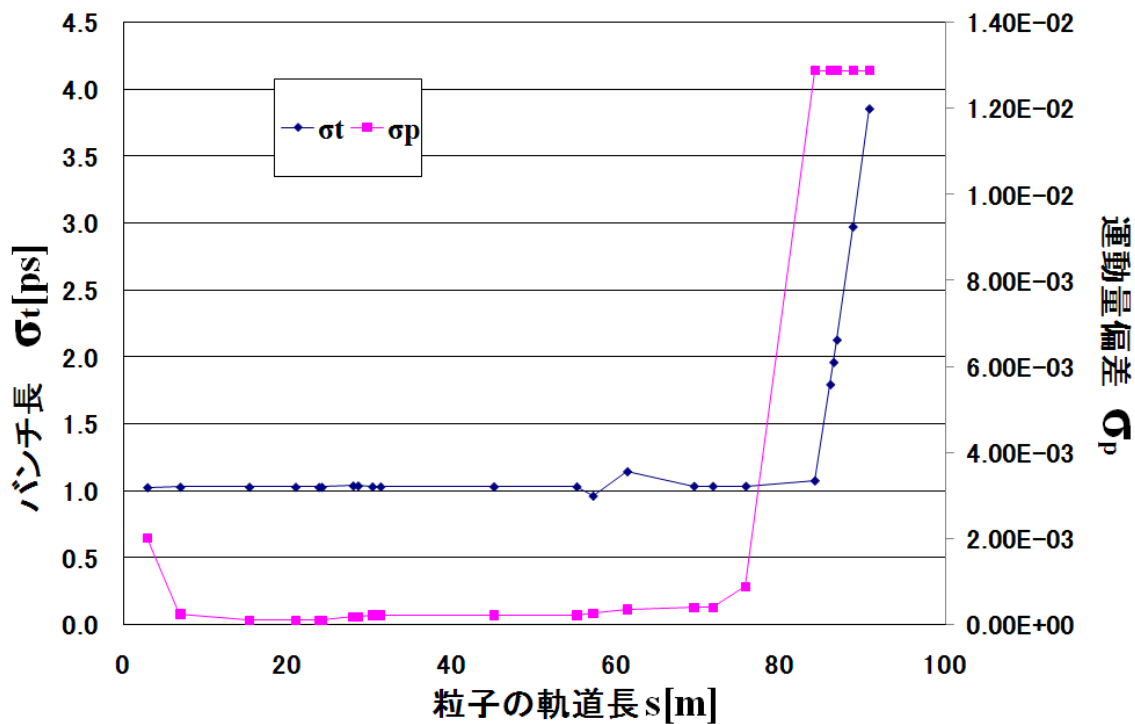


図 6.7 : CSR あり、初期バンチ長 1 ps のときのバンチ長と運動量偏差

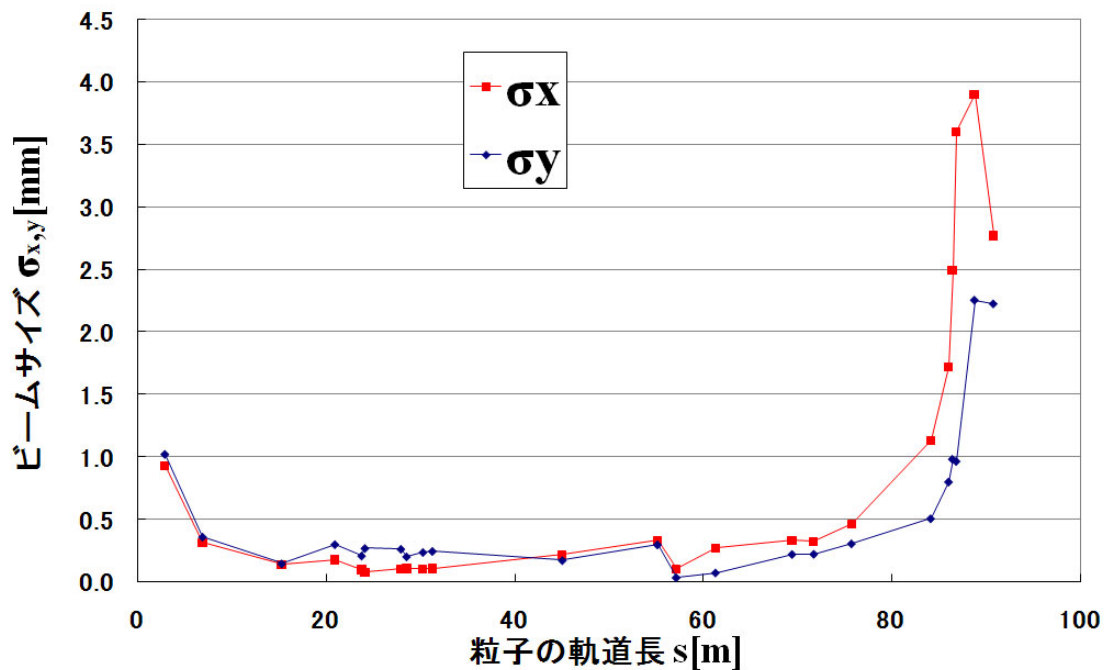


図 6.8 : CSR あり、初期バンチ長 1 ps のときの水平・垂直方向のビームサイズ

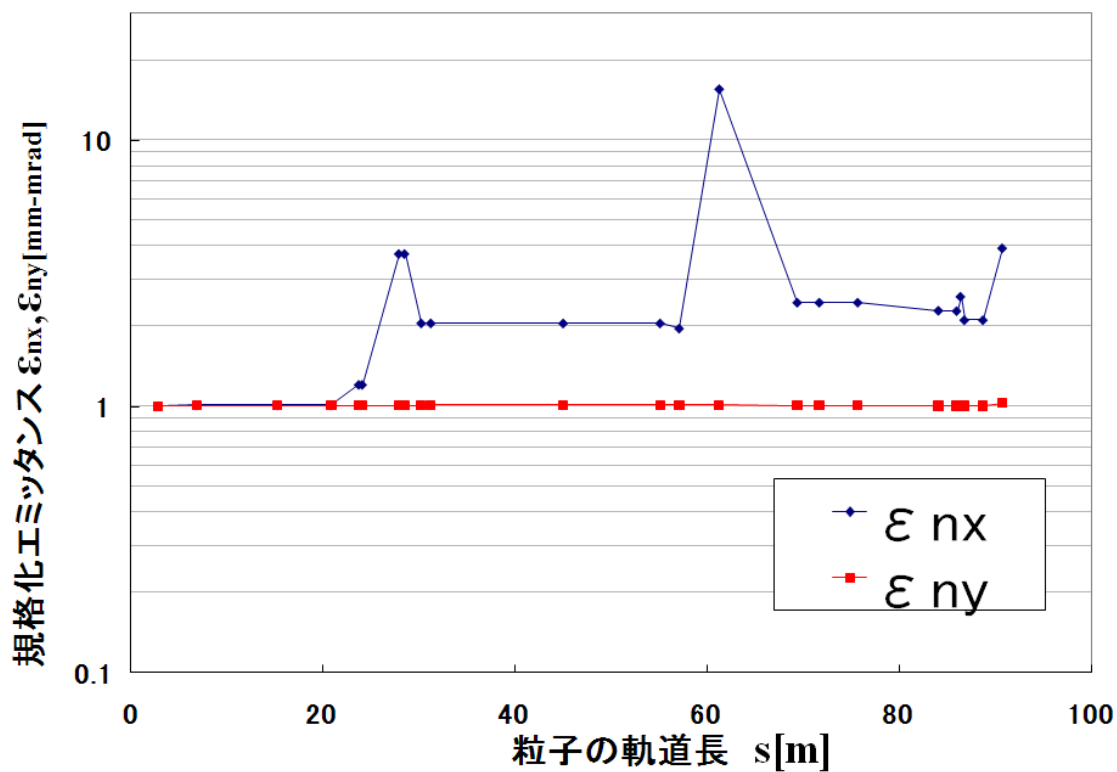


図 6.9 : CSR あり、初期バンチ長 1 ps のときの水平・垂直方向の規格化エミッタンス

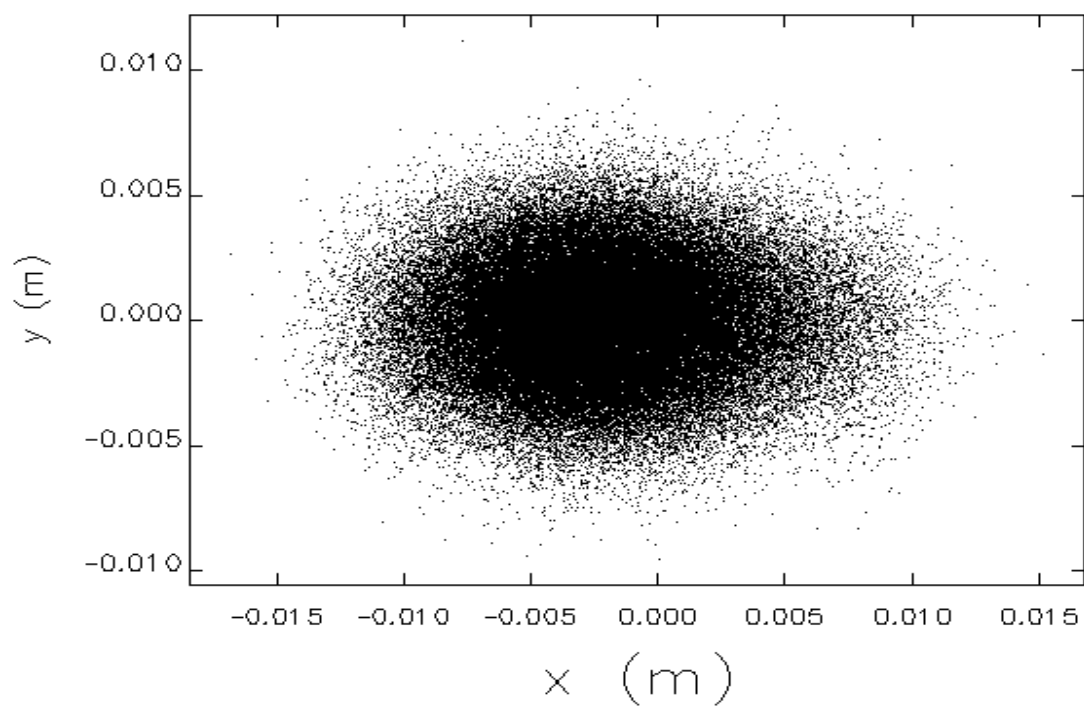


図 6.10 : CSR あり、初期バンチ長 1 ps のときのビームサイズ最大の場所($s=89$ [m])での (x,y) 電子分布

6.2.2 初期バンチ長 2ps,3ps におけるシミュレーション結果

前節と同様のラティスにおいて、初期のバンチ長を変えた結果を示す。

図 6.11、図 6.12 より、初期バンチ長が長いほど、第 1 アーク部通過直後のバンチ形状にて CSR 効果が見られなくなっている。バンチ全体のエネルギー偏差は式(4-57)で表わされる。バンチが長ければ単位長さ当たりの電子密度が下がり、放射される CSR が小さくなるため CSR 効果が弱くなる。これはこの式より明らかで、バンチ長の $4/3$ 乗で CSR が小さくなり、バンチが長いほど CSR の影響が小さくなる。そのため減速後のバンチ形状が崩れなくなる。バンチ長が長いと図 6.12 (b)のようにほとんど CSR の効果が見られないほどになる。(c)は減速後であり、バンチのエネルギーが落ちている。そのため CSR 効果が相対的に大きく見えてくる。

初期バンチ長が 2 ps、3 ps の場合のリニアオプティクス、ビームサイズ、バンチ長と運動量偏差、エミッタンスのプロットを図 6.13~図 6.18 に示す。バンチが長いほど CSR の効果が小さくなるのでバンチ長が 2 ps では 1 ps に比べて CSR によるエミッタンス増大が抑えられている。第 1 アーク部通過後のエミッタンスは 1.2 mm-mrad 程である。CSR によるエミッタンス増大が低いためにビームサイズも 1 ps に比べて小さくなっている。3 ps ではさらにエミッタンスが下がっている。第 1 アーク部通過後で 1.1 mm-mrad 程である。ビームサイズもビームロスが起こらない程度には小さい。表 6.2 に、初期バンチ長 1~3 ps の時の第 1 アーク部通過後のエミッタンスを示す。また、表 6.2 をプロットしたものを図 6.19 に示す。

大電流モード(電流 100 mA)の運転では、初期バンチ長 1 ps の場合、ビームが加速空洞に残す寄生モード損失が大きくなりすぎるので[1]、初期バンチ長を 2~3 ps にすることがエミッタンス保持の観点だけでなく望まれている。

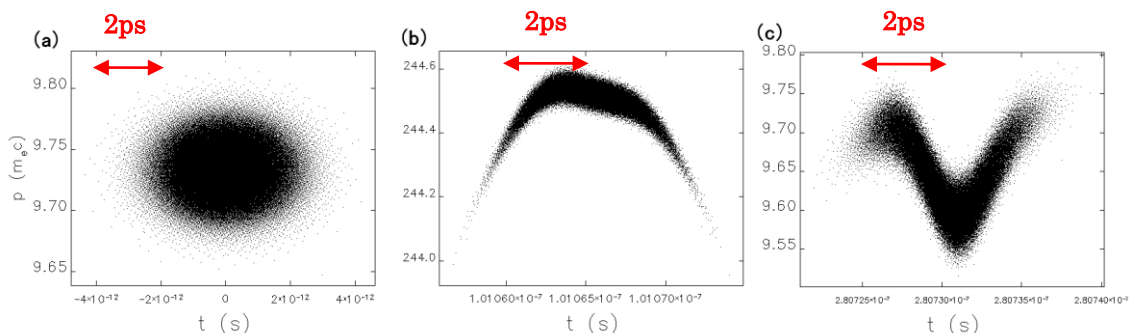


図 6.11 : CSR あり、初期バンチ長 2 ps のときの (t,p) のバンチ形状。

(a):初期、(b):第 1 アーク部通過後、(c):減速後

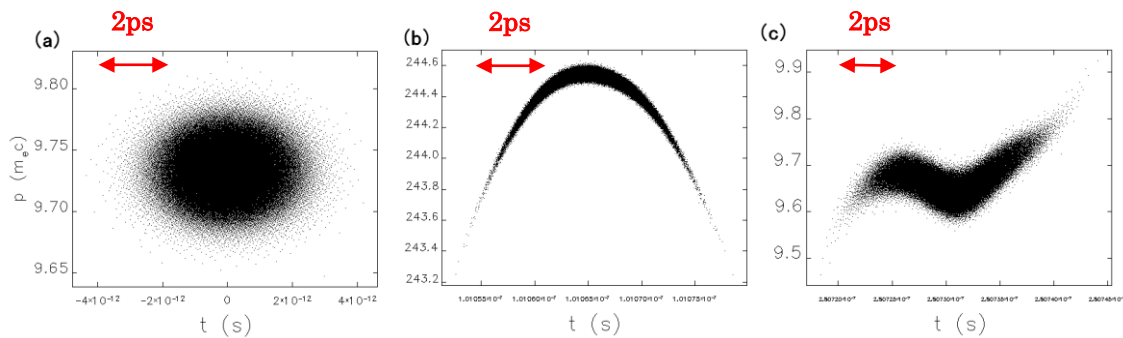


図 6.12 : CSR あり、初期バンチ長 3 ps のときの (t,p) のバンチ形状。

(a):初期、(b):第 1 アーク部通過後、(c):減速後

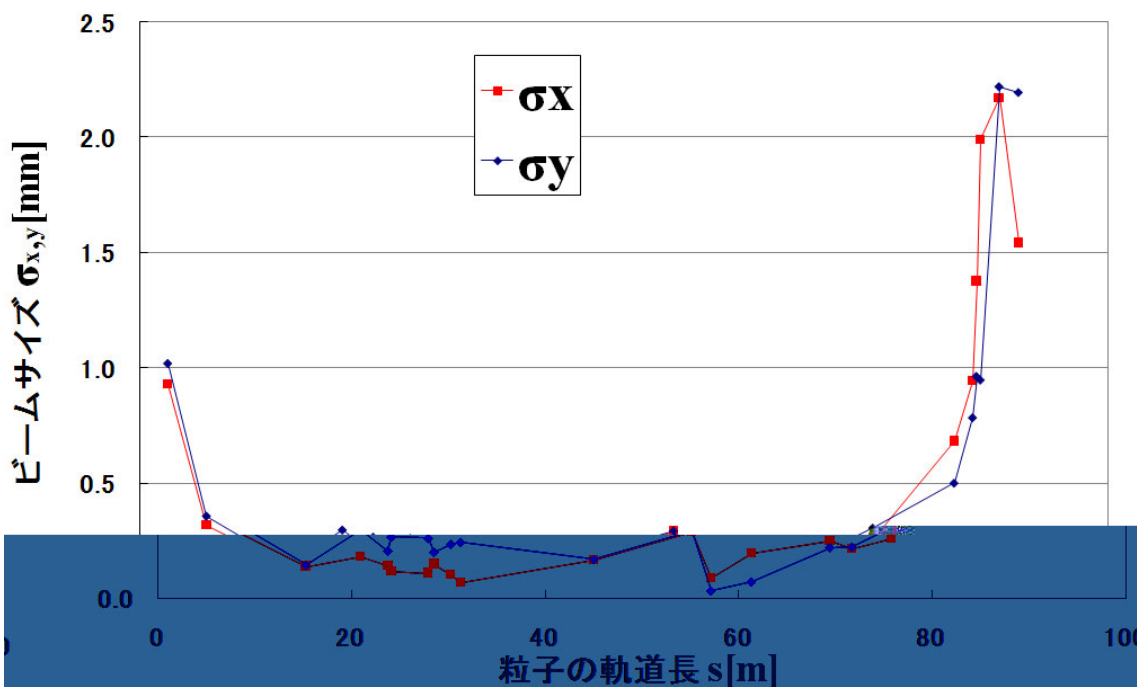


図 6.13 : CSR あり、初期バンチ長 2 ps のときの水平・垂直方向のビームサイズ

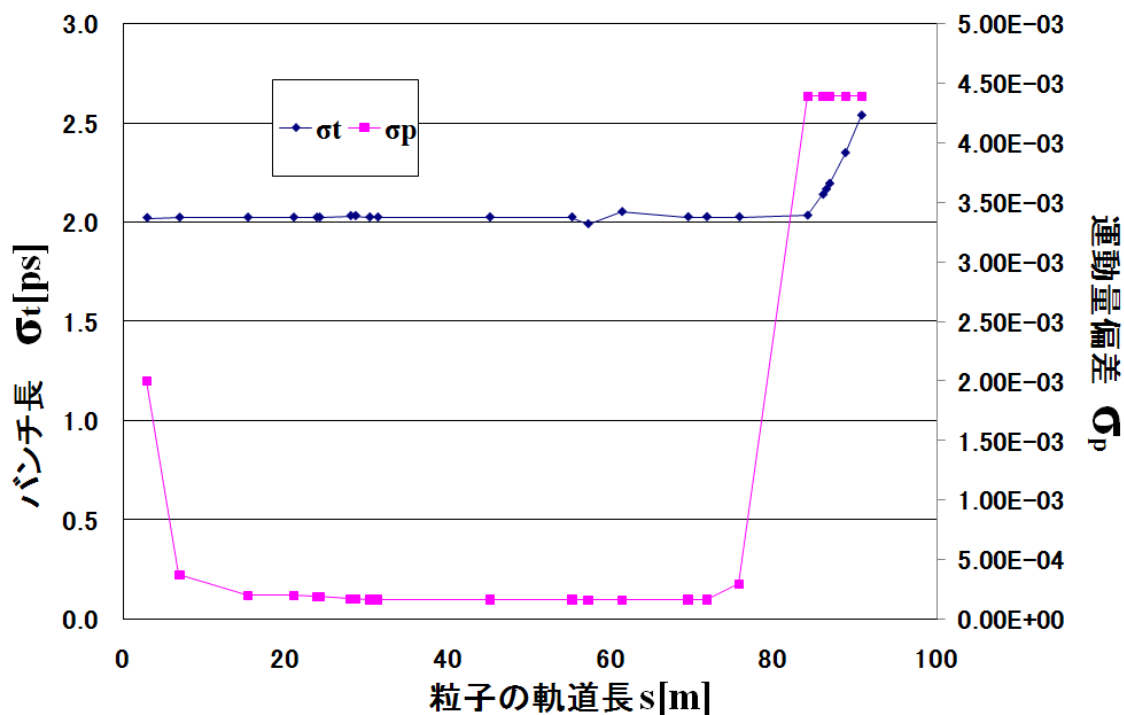


図 6.14 : CSR あり、初期バンチ長 2 ps のときのバンチ長と運動量偏差

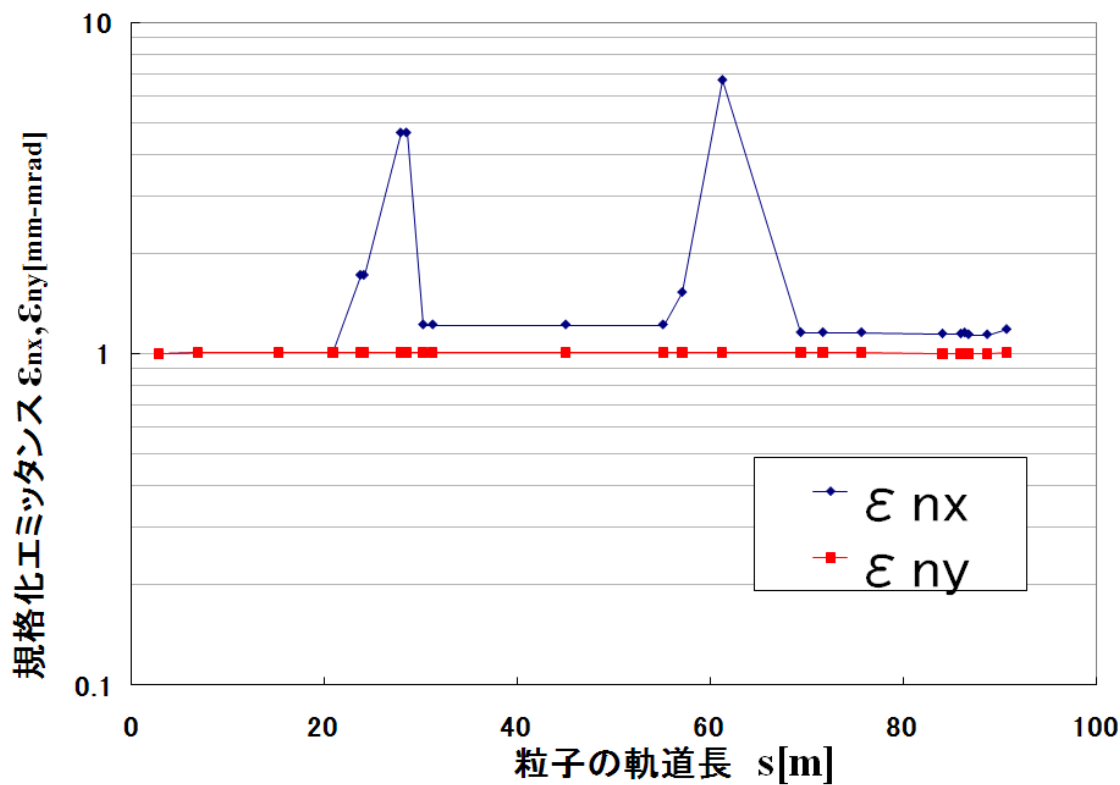


図 6.15 : CSR あり、初期バンチ長 2 ps のときの水平・垂直方向のエミッタンス

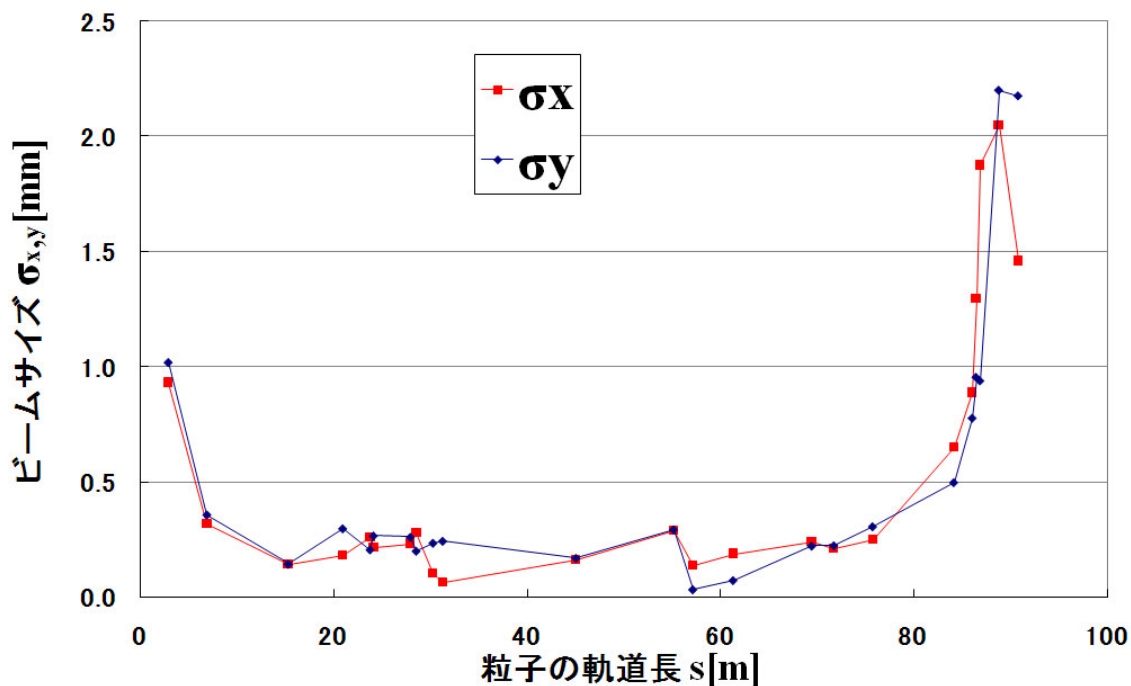


図 6.16 : CSR あり、初期バンチ長 3 ps のときの水平・垂直方向のビームサイズ

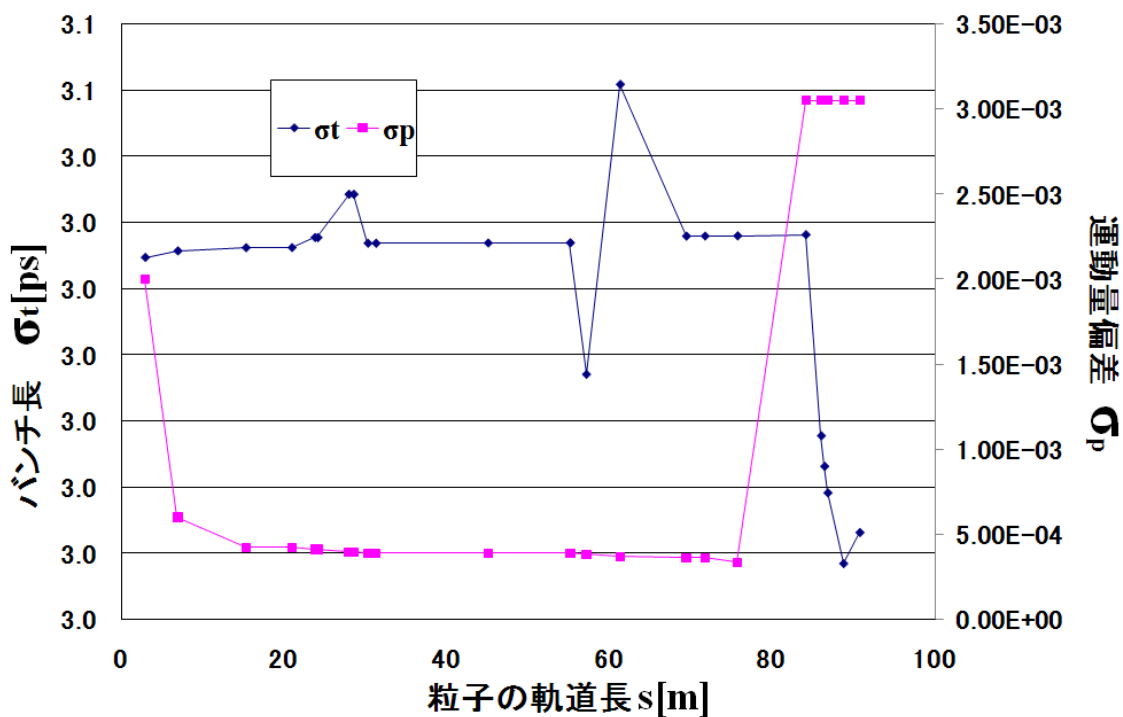


図 6.17 : CSR あり、初期バンチ長 3 ps のときのバンチ長と運動量偏差

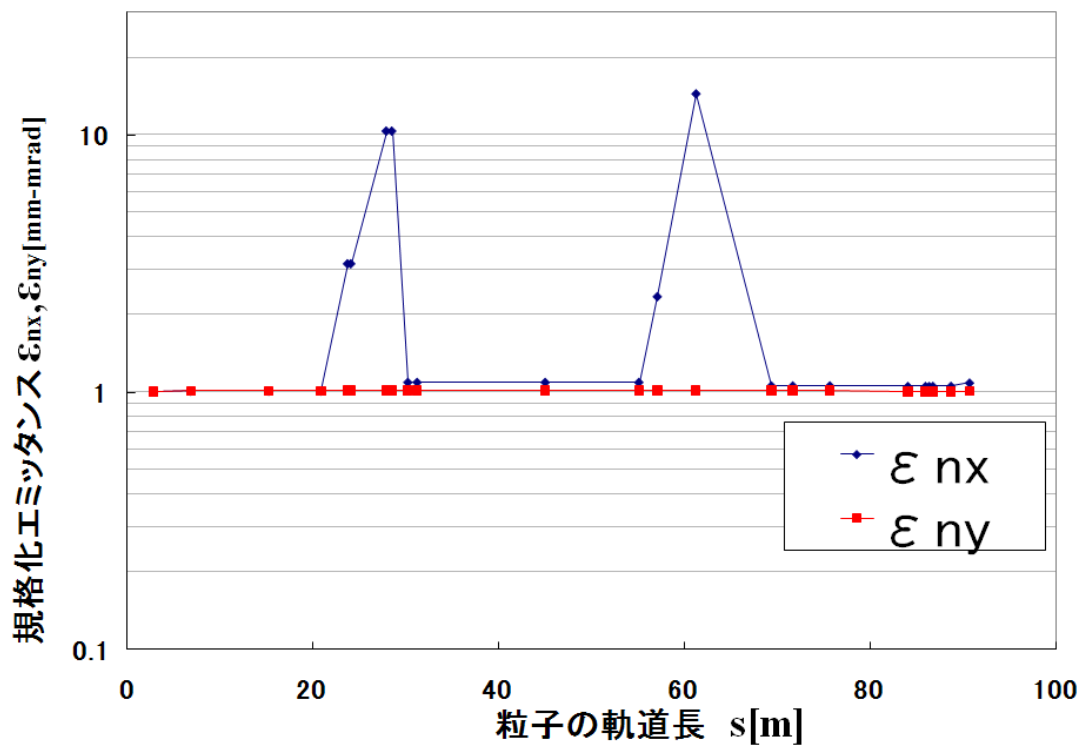


図 6.18 : CSR あり、初期バンチ長 3 ps のときのバンチ長と運動量偏差

表 6.2 : 初期バンチ長と直線部の水平規格化エミッタンスの依存性

初期バンチ長 [ps]	水平規格化エミッタンス [mm-mrad]
1	2.054
2	1.226
3	1.094

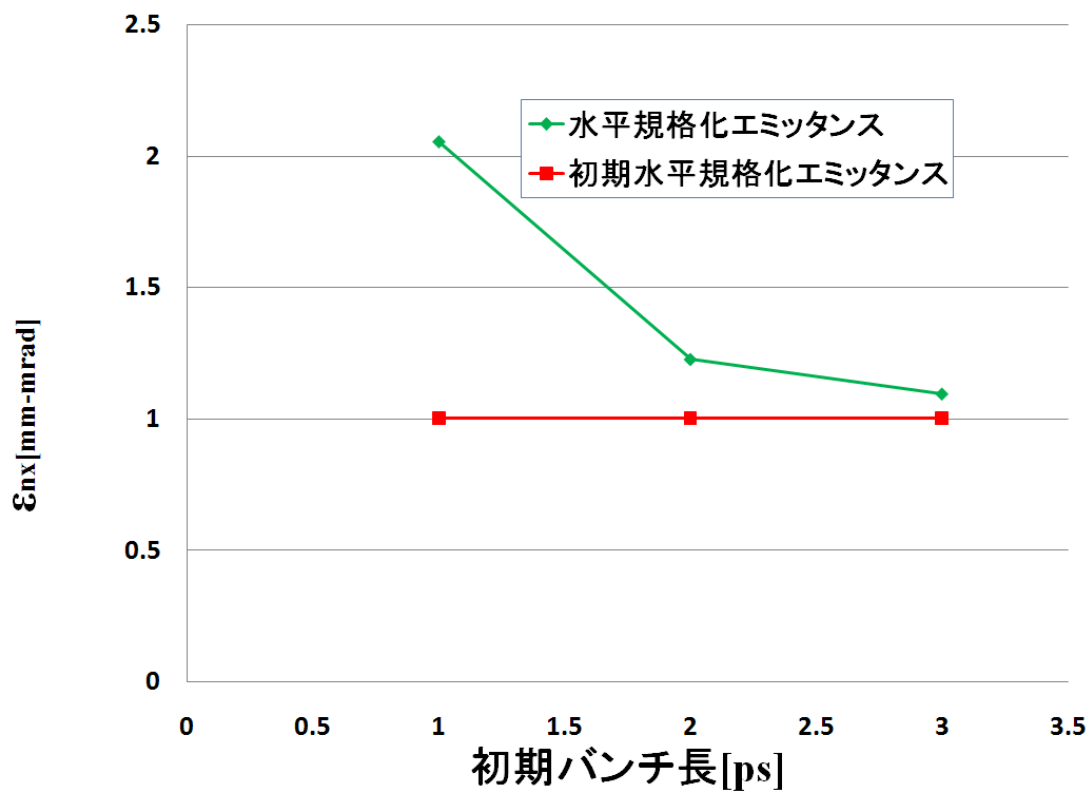


図 6.19 : 初期バンチ長と直線部の水平規格化エミッタンスの依存性

6.2.3 エネルギー回収率について

ここではエネルギー回収率について述べる。1 ps におけるビームの平均運動量の推移と回収率を表 6.3 と表 6.4 に、2 ps の場合は表 6.5 と表 6.6 に、3 ps の場合は表 6.7 と表 6.8 に示す。

ここでエネルギーの回収率 R は、 E_{acc} = (加速時にバンチに与えたエネルギー)、 E_{dec} = (減速時にバンチから回収したエネルギー) とし、

$$R = \left(1 - \frac{E_{dec} - E_{acc}}{E_{acc}} \right)$$

であるとした。1 ps、2 ps、3 ps 共にエネルギー回収率は同程度のものとなり、CSR によるエネルギー減少はバンチが長いほど低くなっている。CSR によるエネルギー減少量は 2 つ目の加速モジュール通過後から 1 つ目の減速モジュール直前の値を引いたものであり、インコヒーレント SR の減衰はほぼ無視出来る。1 ps、2 ps、3 ps それぞれ 0.0785 MeV、0.0307 MeV、0.0177 MeV のエネルギー減少量である。

表 6.3 : 初期バンチ長 1 ps のときの平均運動量の推移

場所	平均運動量[MeV]
初期	4.9738
1 つ目の加速モジュール通過後	64.9835
2 つ目の加速モジュール通過後	124.9725
1 つ目の減速モジュール直前	124.8940
1 つ目の減速モジュール通過後	64.9054
2 つ目の減速モジュール通過後	4.8897

表 6.4 : 初期バンチ長 1 ps のときのエネルギー回収率

場所	エネルギー増減[MeV]	エネルギー回収率[%]
第一空洞	-0.0211	99.965
第二空洞	0.0266	100.044

表 6.5 : 初期バンチ長 2 ps のときの平均運動量の推移

場所	平均運動量[MeV]
初期	4.9738
1つ目の加速モジュール通過後	64.9774
2つ目の加速モジュール通過後	124.9604
1つ目の減速モジュール直前	124.9297
1つ目の減速モジュール通過後	64.9471
2つ目の減速モジュール通過後	4.9379

表 6.6 : 初期バンチ長 2 ps のときのエネルギー回収率

場所	エネルギー増減[MeV]	エネルギー回収率[%]
第一空洞	-0.0210	99.965
第二空洞	0.0263	100.044

表 6.7 : 初期バンチ長 3 ps のときの平均運動量の推移

場所	平均運動量[MeV]
初期	4.9738
1つ目の加速モジュール通過後	64.9673
2つ目の加速モジュール通過後	124.9401
1つ目の減速モジュール直前	124.9224
1つ目の減速モジュール通過後	64.9500
2つ目の減速モジュール通過後	4.9509

表 6.8 : 初期バンチ長 3 ps のときのエネルギー回収率

場所	エネルギー増減[MeV]	エネルギー回収率[%]
第一空洞	-0.0211	99.965
第二空洞	0.0262	100.044

7章 低エミッタンスモードの電子ビーム光学系の設計

7.1 低エミッタンスモードについて

低エミッタンスモードとは、大電流モードよりも1桁エミッタンスが小さいモード(ただし、電流は1/10)で、高コヒーレンスの光を実現できるモードである。この小さいエミッタンスを直線部 **ST2** まで維持することが重要である。

7.2 シミュレーション結果

低エミッタンスモードのシミュレーションを行った初期パラメータを表 7.1 に示す。

表 7.1 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	0.1 [mm-mrad]
垂直規格化エミッタンス	0.1 [mm-mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	7.7 [pC]
電子のエネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	-1.1 [°]
R_{56}	0

シミュレーション結果の規格化エミッタンスを図 7.1、バンチ長と運動量偏差を図 7.2 に示す。この図から、直線部の規格化エミッタンスは初期エミッタンスとほとんど変化はなく、良く保存されていることが分かる。図 7.3 ではビーム行路に沿ったビームサイズの分布を示す。r.m.s.で約 0.7 mm まで抑えられて

いる。図 7.4 では最大のビームサイズを示した第 2 アーク部の場所での横方向の 2 次元電子分布を示す。想定しているアパーチャーは半径 25 mm 程度であるので、十分に小さいといえる。

大電流モードと同様に、初期バンチ長を動かした結果を表 7.2 と図 7.5 に示す。

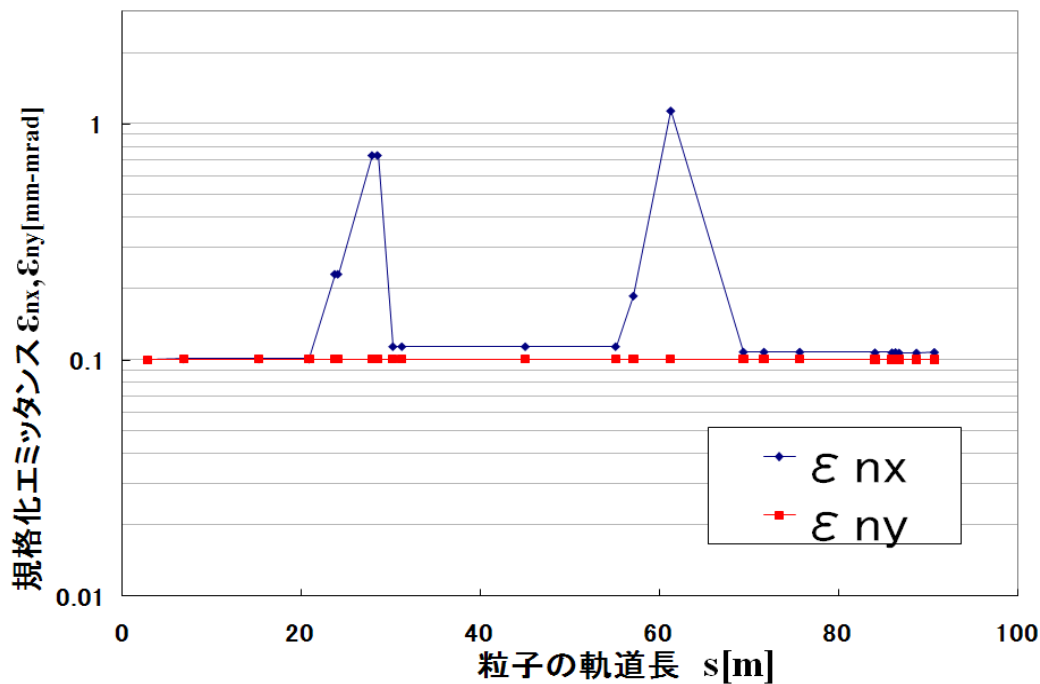


図 7.1 : 水平・垂直規格化エミッタンスの推移。

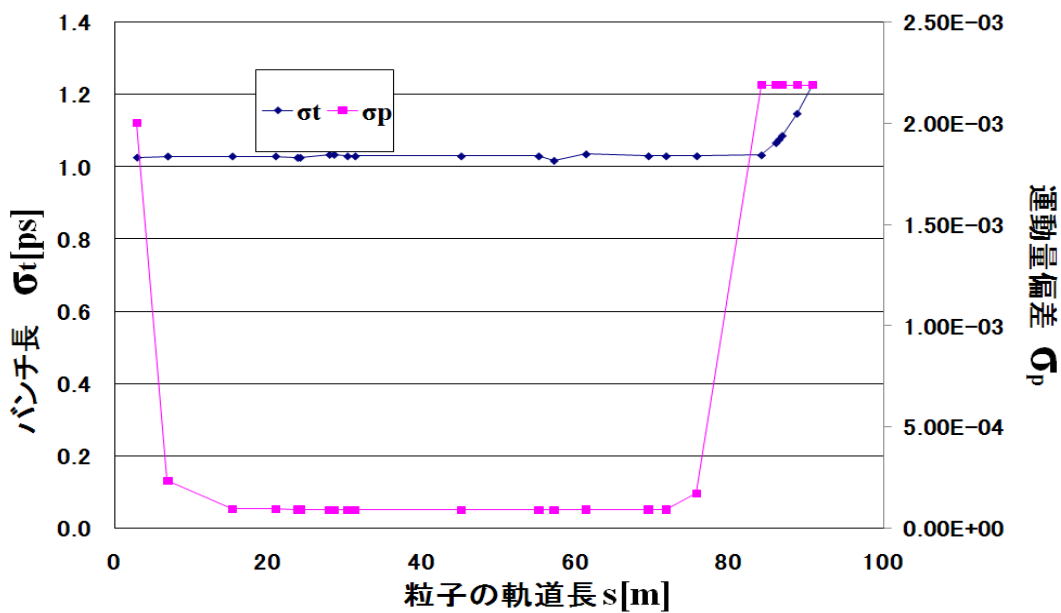


図 7.2 : 水平・垂直規格化エミッタンスの推移。上限値の設定。

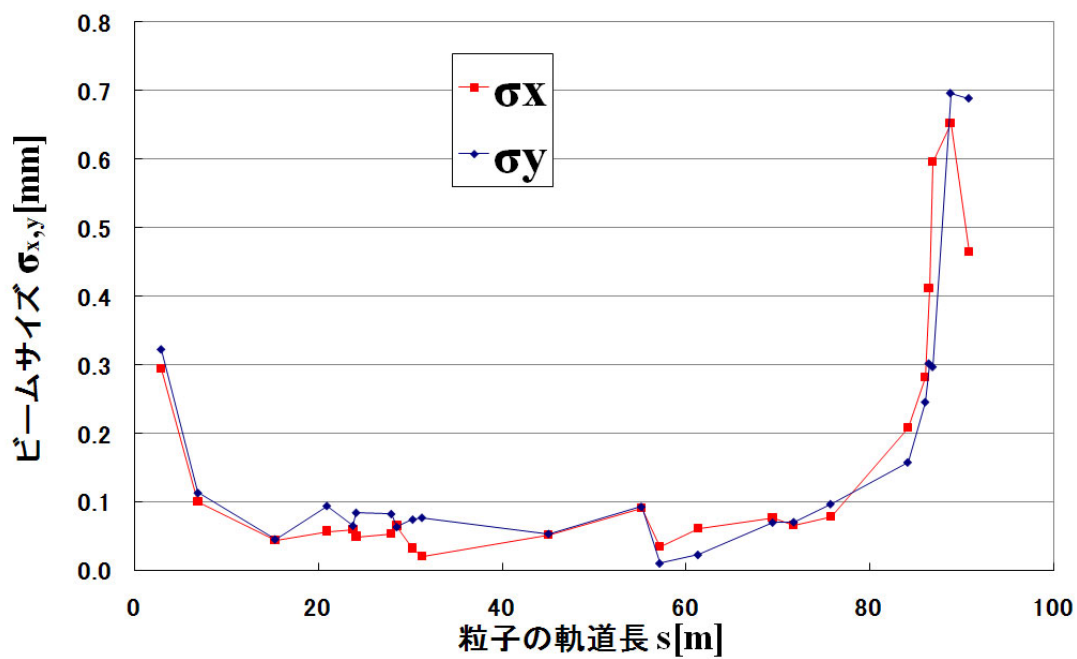


図 7.3 : 水平・垂直方向のビームサイズ

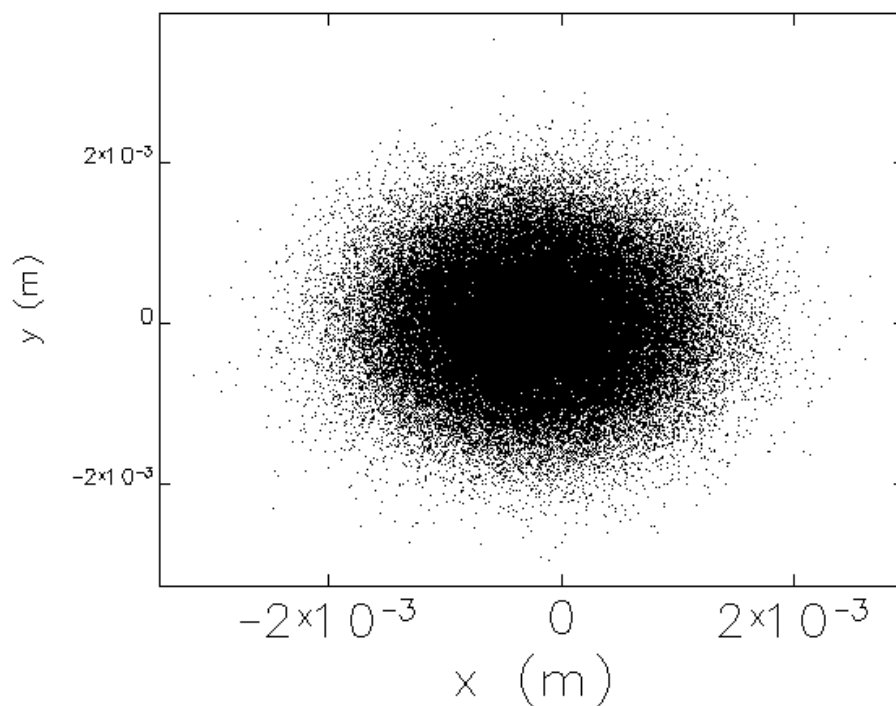


図 7.4 : ビームサイズ最大の場所(第 2 アーク部)での電子分布

表 7.2 : 初期バンチ長と直線部の水平規格化エミッタンスの依存性

初期バンチ長 [ps]	水平規格化エミッタンス [mm-mrad]
1	0.114
2	0.104
3	0.103

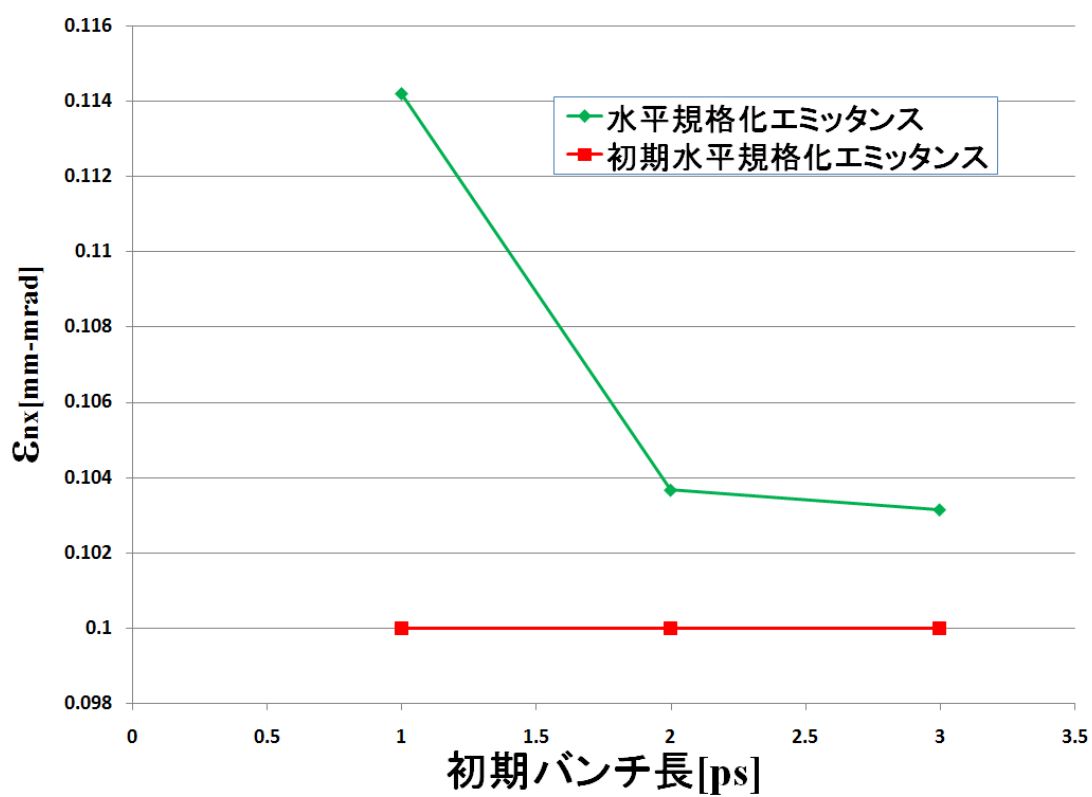


図 7.5 : 初期バンチ長と直線部の水平規格化エミッタンスの依存性

8章 バンチ圧縮モードの電子ビーム光学系の設計

8.1 バンチ圧縮モードについて

バンチ圧縮モードとは、バンチを圧縮して極短バンチを生成して発生させる極短パルス光を超高速ダイナミクスなどの研究に使うことを目的としたモードである。バンチ圧縮モードでは繰り返しが最大で1 MHz程度と小さい。本章ではバンチ圧縮モードのビーム光学系の設計とシミュレーション結果を示す。また、様々な初期値変更を行い、初期値の依存性について調べた結果を示す。

8.2 バンチ圧縮の方針

今回採用したバンチ圧縮の方針は、加速時に敢えて加速の位相角をずらし、その後それにより出来たエネルギーのずれを利用しアーク部で圧縮を行う。

エネルギーのずれによる進行方向のずれだが、1次の場合は3.6節で議論している。今回は高次の項を考慮に入れて式を表すと

$$-\Delta z = R_{56} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) + T_{566} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 + U_{5666} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^3 - \dots = c\beta\Delta t \quad (8-1)$$

という式で表わされる。ここで、 Δz と Δt は運動量偏差による進行方向の位置のずれと時間の遅れである。

まず1次の項のみを考える。この時の圧縮条件は

$$k_{RF} \sin \varphi_{RF} = \frac{1}{R_{56}} \quad (8-2)$$

となる。ここで k_{RF} は加速波の波数。 φ_{RF} は加速時の位相ずらし角である。また R_{56} は分散関数を軌道の曲率 ρ で割ったものを考えている領域Cにわたる積分で式(3-105)にあるように

$$R_{56} = \int_C \frac{\eta}{\rho} ds \quad (8-3)$$

と定義される。

ここで、例えば φ_{RF} を 10° とした場合(加速波の山から 10° 遅れて入る)、バンチの前方のエネルギー高くなり、バンチの後方のエネルギーは低くなる。この時、式(8-2)を使うことによりバンチを圧縮する R_{56} が導かれる。コンパクト

ERLでの加速周波数が1.3 GHzということを使うと $R_{56} = 0.21$ でバンチが圧縮されるということになる。これはつまり式(8-1)の右辺第一項から、エネルギーの高い粒子(前方の粒子)が R_{56} の影響により後方にずれ、エネルギーの低い粒子(後方の粒子)は R_{56} の影響により前方にずれるため圧縮されるということである。しかしながら、式(8-2)ではこの圧縮が十分には行われぬ。なぜなら加速前の低エネルギーのバンチは光速よりも遅く、実際の加速位相は加速空洞に入った時の位相からずれる。この事により位相ずれによる運動量偏差が式(8-2)で与えられたものとは不十分となり、バンチの速度と加速電場との速度差を考慮に入れた R_{56} を導出する必要がある。また、これとは別に R_{56} による圧縮は1次の項のみしか考えておらず、エネルギーの分散が高くなる場所では高次の項も無視できない。 R_{56} のみではなく6極電磁石を使い T_{566} の補正も行うことにより、さらなる圧縮を行う。実際に圧縮する際に行う加速位相のずれ角や R_{56} の算出の詳細はAppendix.A,Bに示す。

第1アーク部でバンチの圧縮を行うが、第2アーク部では減速空洞を通る時にちゃんとエネルギー回収されるようバンチを戻さなくてはならない。そのため第2アーク部の R_{56} は第1アーク部のそれと符号を逆にした値を設定する。

8.3 バンチ圧縮のシミュレーション結果

バンチ圧縮は、前節に記述した方針に沿って行い、ダンプまでのシミュレーションを行った。表 8.1 に初期パラメータを示す。この節では加速勾配 15 MV/m の場合について述べる。

表 8.1 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm-mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm-mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77[pC]
電子の入射エネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	14.46 [°]
R_{56}	0.13095

実際にバンチが圧縮される流れを図 8.1 に示す。図 8.1 のように、バンチの進行方向に加速空洞で勾配を与え、その後 R_{56} を利用し圧縮している様子が分かる。(a)の時のバンチ長は 1.04 ps であったのに対し、(c)では 55.69 fs と圧縮されている。

次にリニアオプティクスを図 8.2、図 8.3 に示す。主に 4 極電磁石の磁場強度の調整は、リニアオプティクスのベータatron関数が抑えられるように行っている。偏向電磁石の曲率半径が 1 m なので、分散関数は偏向電磁石部での積分が R_{56} になるように設計されている。第 1 アーク部では $R_{56} = 0.1308$ 、第 2 アーク部では $R_{56} = -0.1308$ なので、図 8.3 のように第 2 アーク部では第 1 アーク部に比べて、分散関数のマイナス部分が強くなっている。

この時の全周分の水平・垂直ビームサイズ、バンチ長・運動量偏差、水平・垂直規格化エミッタンスのプロットを図 8.4~図 8.6 に示す。ビームサイズに関

しては、バンチ減速後に CSR によるエミッタンス増加の影響が大きくなり、それが表れている。また、図 6.5 と図 6.7 で既に触れたが、CSR なしとありで減速後の運動量偏差が大きく違う。加速後は元々のエネルギーが大きいため CSR による運動量の広がり相対的に小さいものであったが、減速後バンチのエネルギーが下がると、その CSR による運動量広がり相対的に大きくなる。それに応じて、バンチ内に大きな速度差が生じバンチ長が広がっていく。

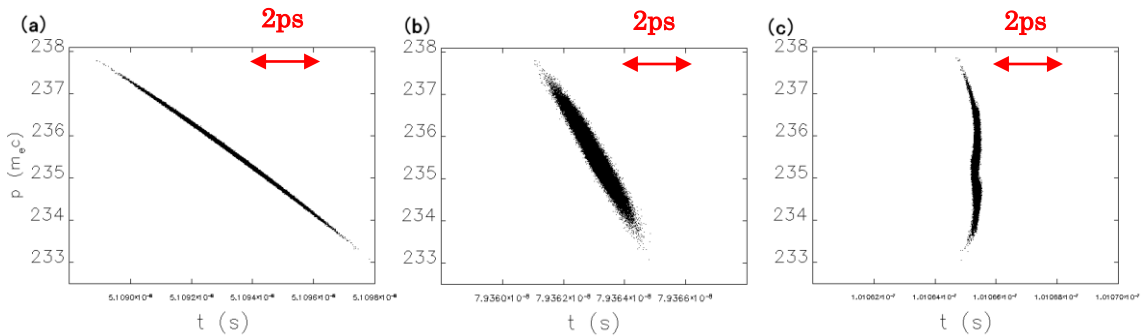


図 8.1 : (t,p) のバンチ形状。(a):主加速モジュール 2 通過直後、
(b):第 1 アーク部の最初の偏向電磁石通過後、(c):第 1 アーク部を出た場所。

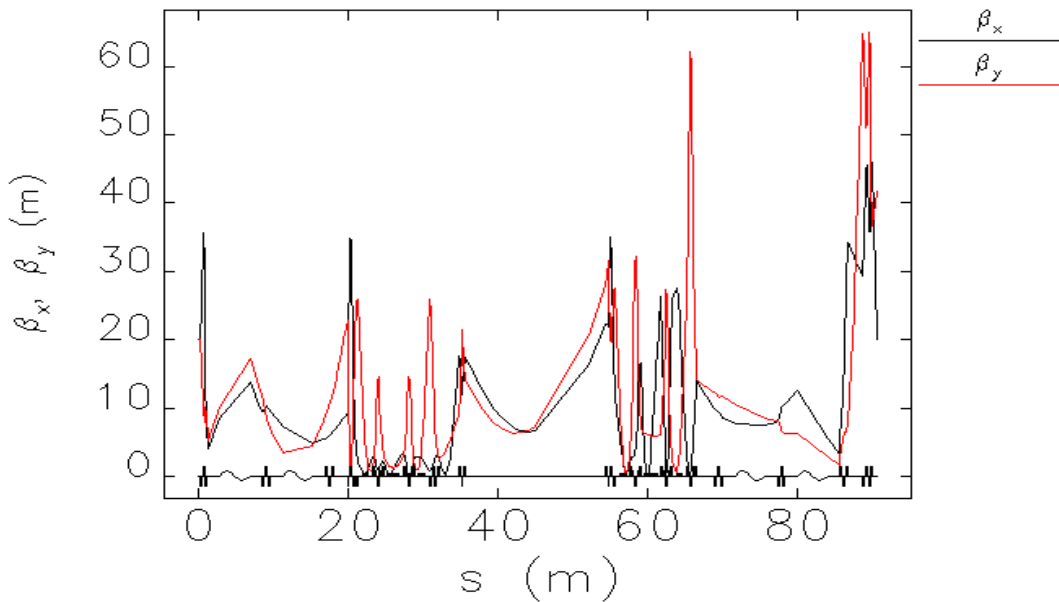


図 8.2 : リニアオプティクスのベータatron関数

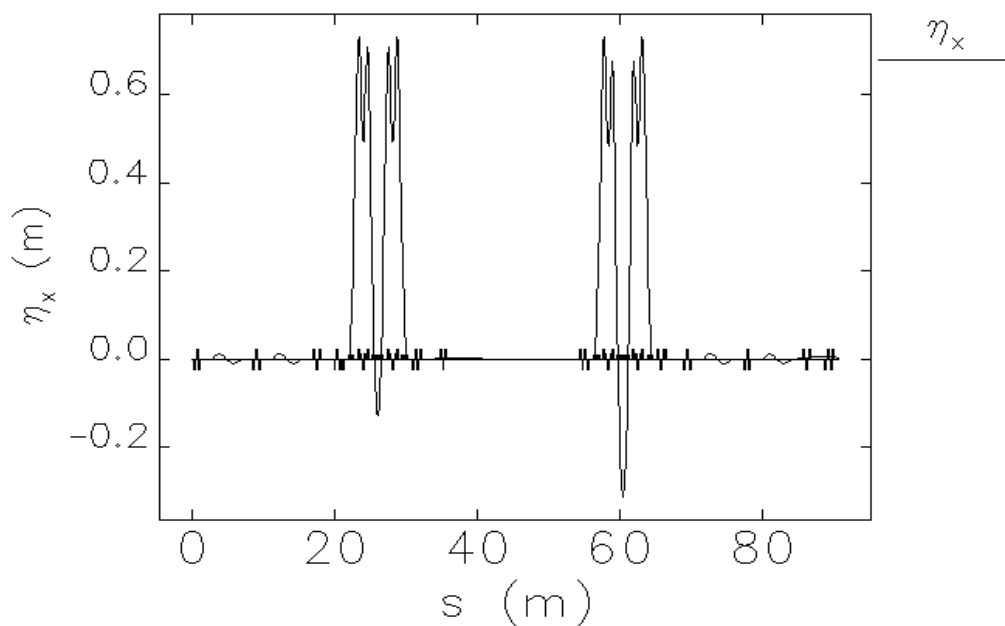


図 8.3 : リニアオプティクス分散関数

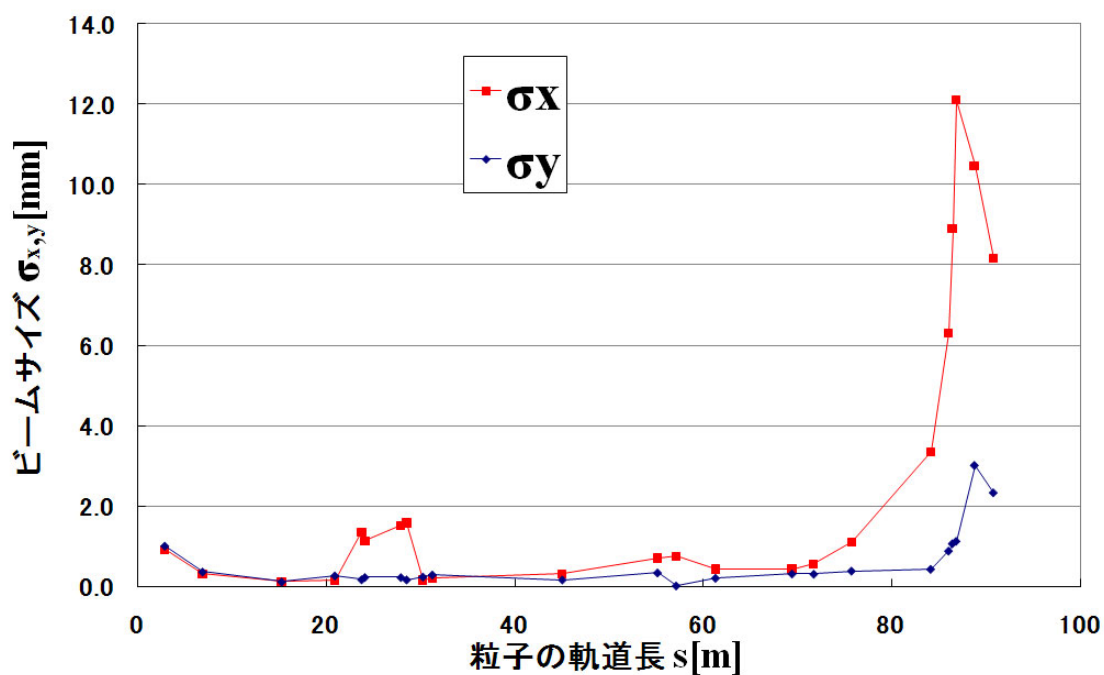


図 8.4 : 水平・垂直方向のビームサイズ

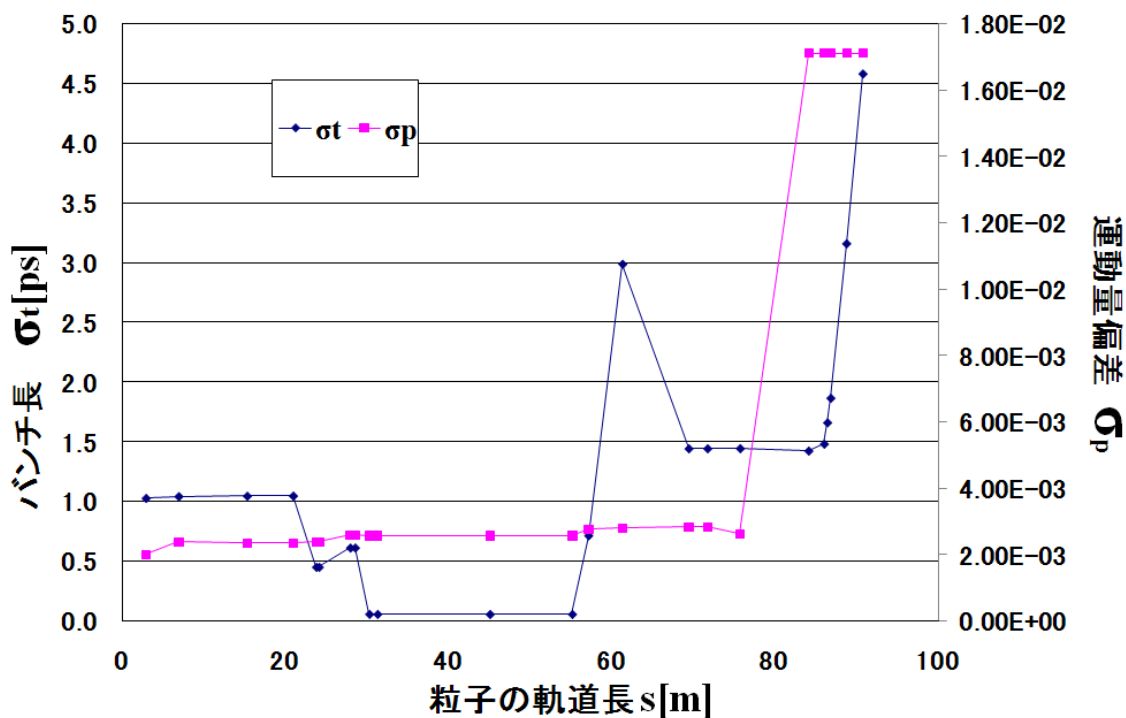


図 8.5 : バンチ長と運動量偏差

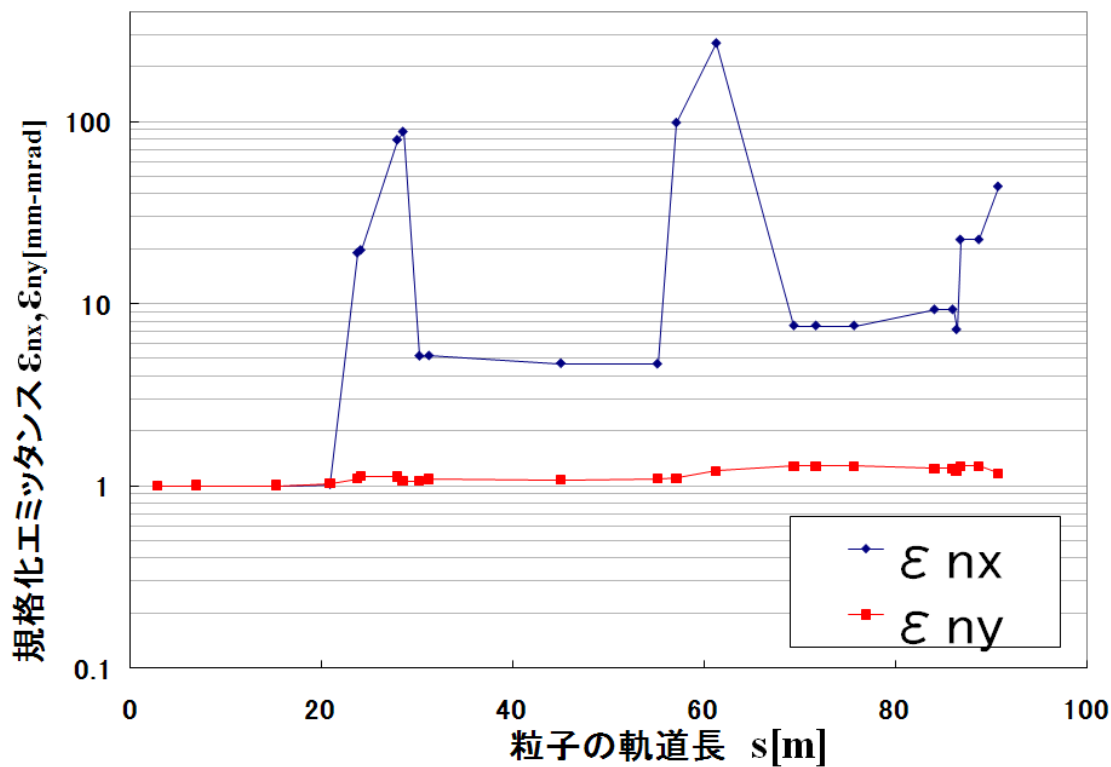


図 8.6 : 水平・垂直方向の規格化エミッタンス

8.4 ビームサイズの調整

8.3節のままでビームサイズが少し大きいので、さらに小さくすることが望ましい。ここでは、ビームサイズを小さくするために、いくつかの方法を試した。

まず、ST3のQ31,Q32,Q33の3つの4極電磁石の磁場強度を動かしてビームサイズが小さくなるよう調整した結果を図8.8~図8.10に、その時のリニアオプティクスを図8.7に示す。ビームサイズについては水平方向のサイズを下げるように4極電磁石の磁場を設定したため、その分垂直方向のビームサイズが悪くなった。しかし、水平・垂直方向どちらもビームサイズが8 mm(rms)以下になった。

次に、直線部に新たに4極電磁石を3台追加し、ビームサイズの調整を行った結果を図8.11~図8.14に示す。直線部の中間の部分に4極電磁石を3台足したので、それまでの前半部分は前と同じオプティクスである。第1アーク部の出口から第2アーク部の出口までの位相の進みを π の奇数倍として、 3π となるようにした。これにより第1アーク部最後の偏向電磁石で発生するCSRキックが第2アーク部最初の偏向電磁石で発生するCSRキックに打ち消されることが期待できる。実際、前に比べてエミッタンスが抑えられていることが分かる。また、ビームサイズは最大で6 mm(rms)程度となった。

さらに、同じく直線部に4極電磁石を3台加えて、直線部以降でベータatron関数を小さく抑える方法を試した。結果を図8.15~図8.18に示す。この方法もビームサイズは最大で6 mm(rms)程度となった。

最後に上記の方法に加えて、減速空洞の位相のずれを、加速時と 180° のずれから第1空洞、第2空洞共に $+2^\circ$ ずらした結果を図8.19~図8.22に示す。ビームサイズは最大で4 mm(rms)程度となった。この位相のずれ(遅れ)は、実効的にはビームの行路をシケイン部のバンプで長くすることによって可能であり、 $+2^\circ$ のずれは長さとして約1.3 mmに相当する。減速空洞の位相のずれ角を調整したので、減速空洞前までは同じオプティクスである。 $+2^\circ$ ずらしたことにより、エネルギーは高くなる。位相をずらす前の減速後の電子エネルギーは4.34 MeV、 $+2^\circ$ ずらした後は5.34 MeVである。そのため通常エミッタンスが下がりビームサイズも下がると考えられる。また、最も水平方向のビームサイズが大きくなった場所の(x,y)電子分布を図8.23に示す。水平方向のビーム

サイズは 4.17 mm(rms)で、アパーチャーが半径 25 mm なので大きなロスはないと期待される。ここは既にダンプ部に入っているため、アパーチャーを増やすことは容易であり、よりロス回避することが可能と思われる。

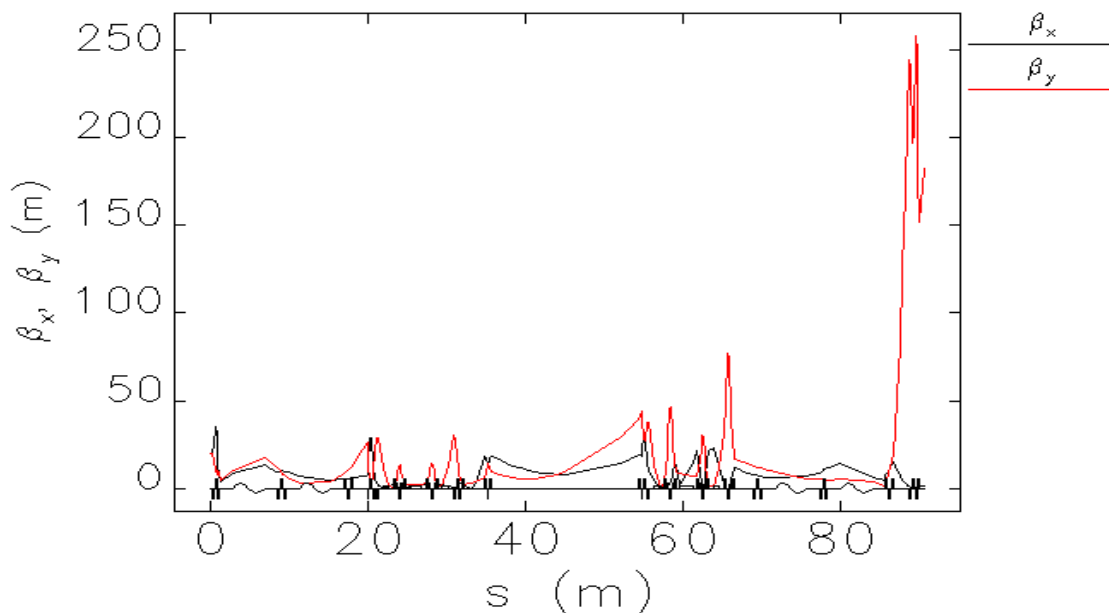


図 8.7: リニアオプティクスのパータトロン関数 (Q31~Q33 を調整した場合)

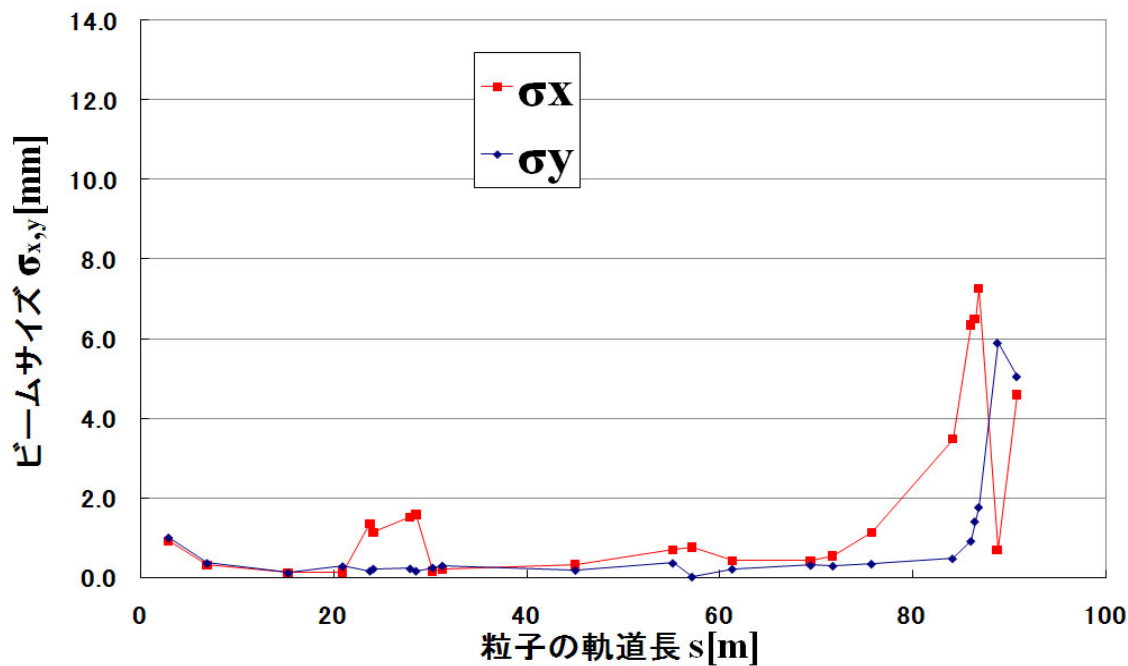


図 8.8: 水平・垂直方向のビームサイズ (図 8.7 と同じ調整をした場合)

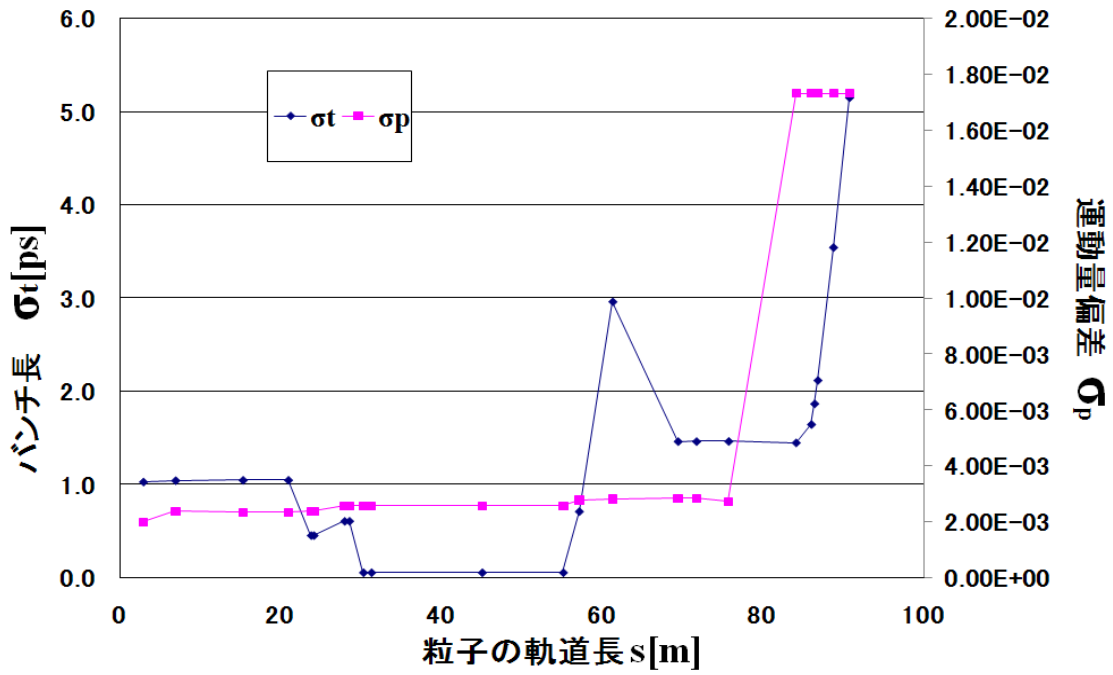


図 8.9 : バンチ長と運動量偏差
(図 8.7 と同じ調整をした場合)

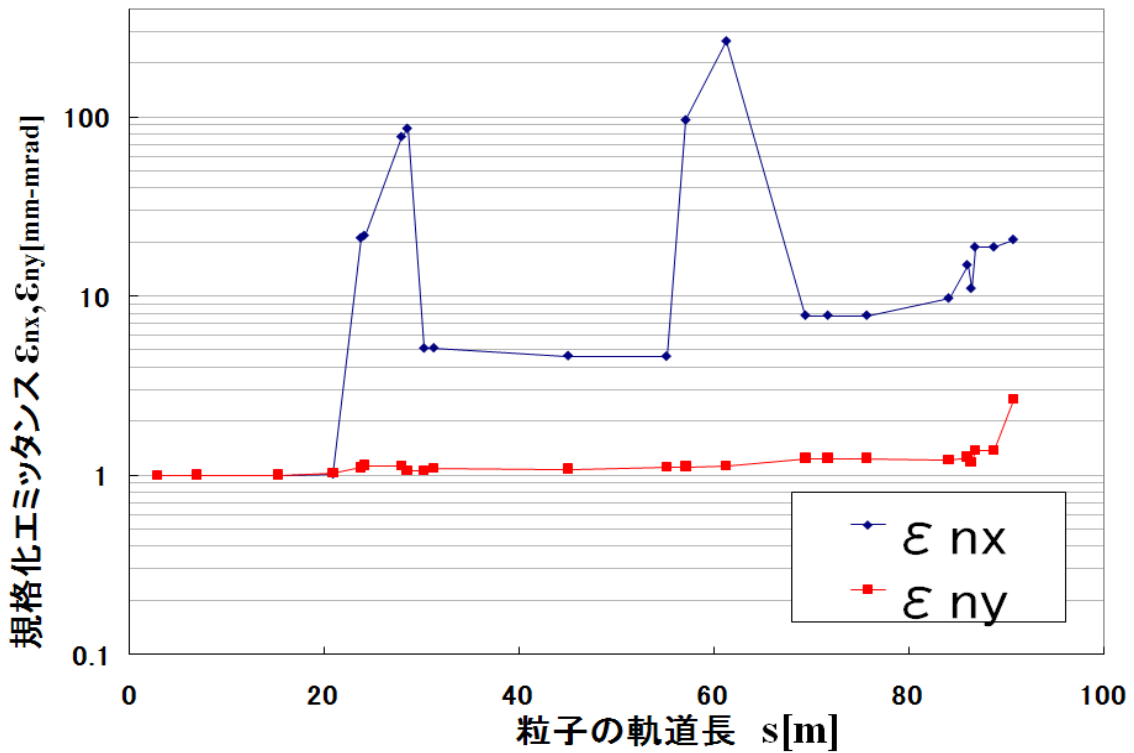


図 8.10 : 水平・垂直方向のエミッタンス
(図 8.7 と同じ調整をした場合)

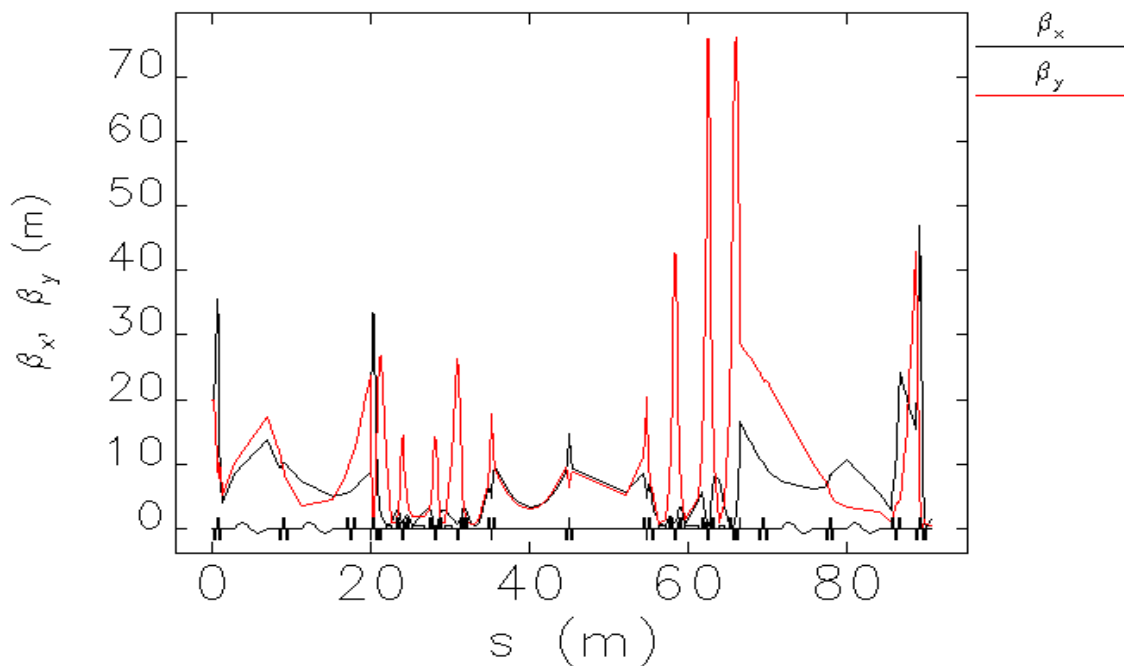


図 8.11 : リニアオプティクスのパータトロン関数

(直線部に4極電磁石を3台追加し、第1アーク部の出口から第2アーク部入口までの位相の進みを π の奇数倍となるように調整した場合)

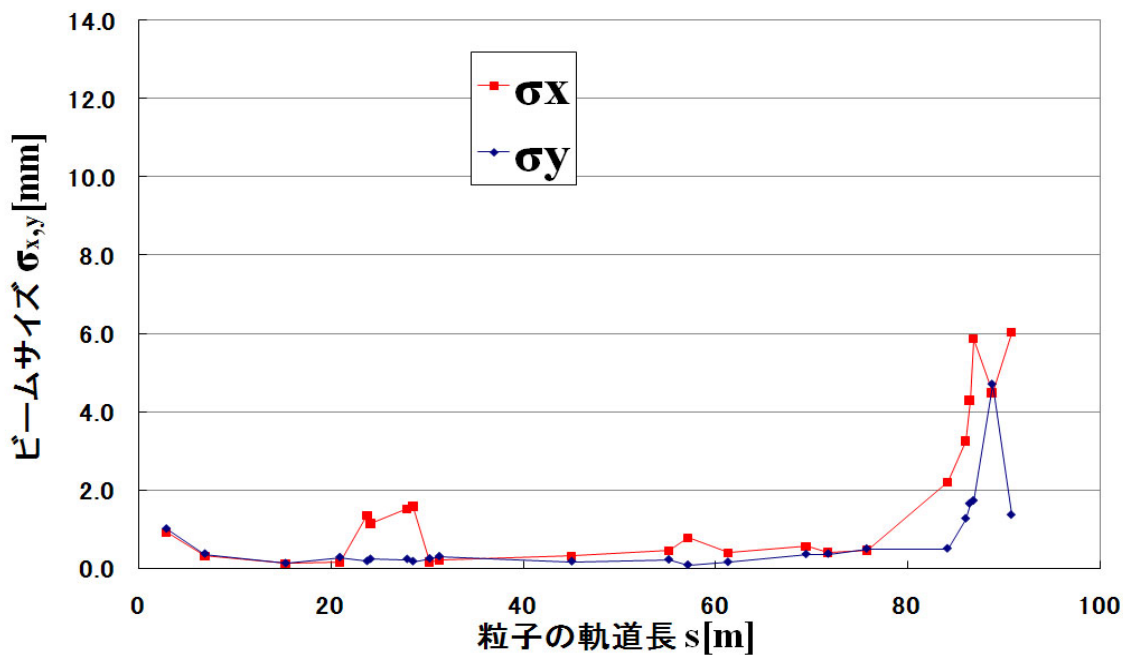


図 8.12 : 水平・垂直方向のビームサイズ

(図 8.11 と同じ調整をした場合)

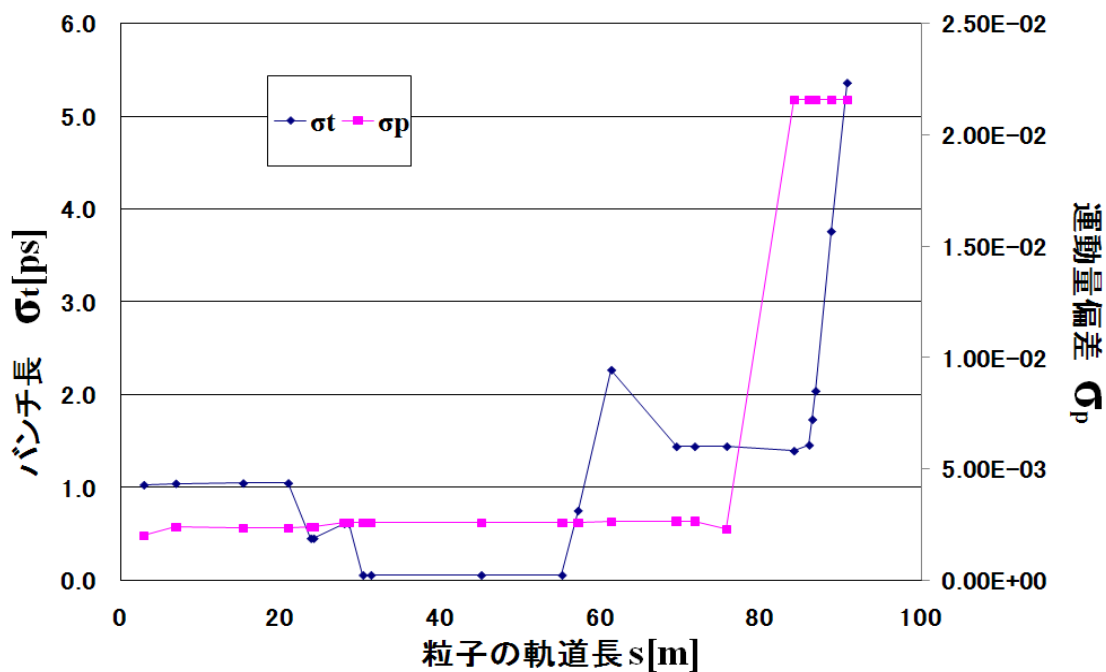


図 8.13 : バンチ長と運動量偏差
(図 8.11 と同じ調整をした場合)

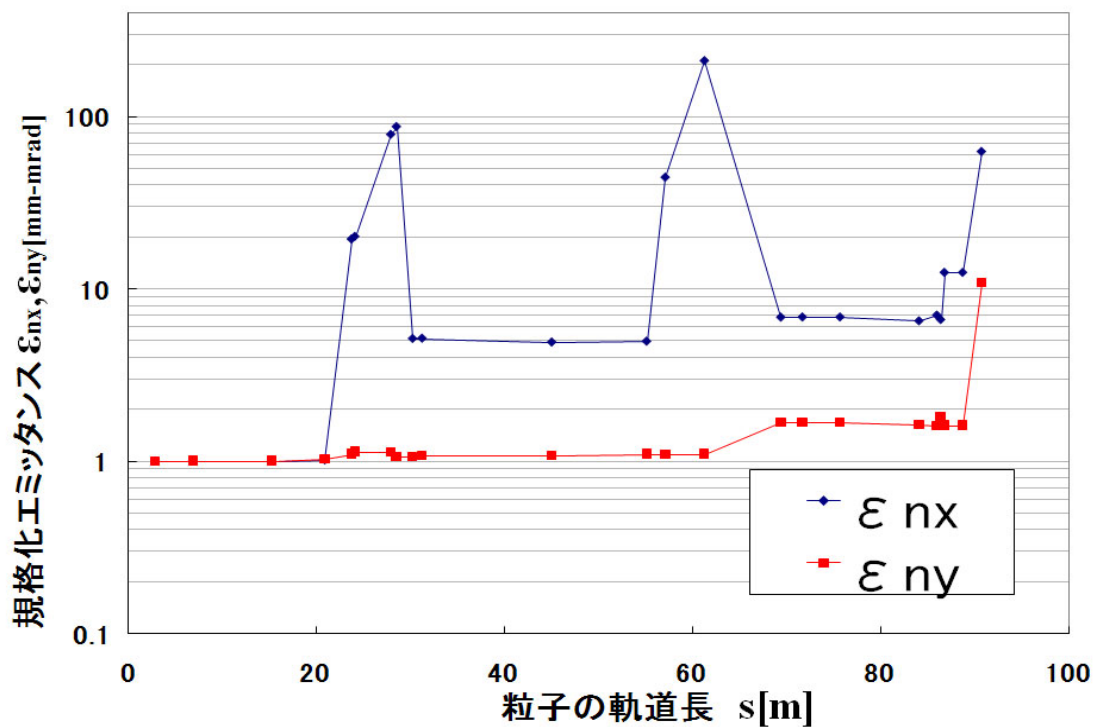


図 8.14 : 水平・垂直方向の規格化エミッタンス
(図 8.11 と同じ調整をした場合)

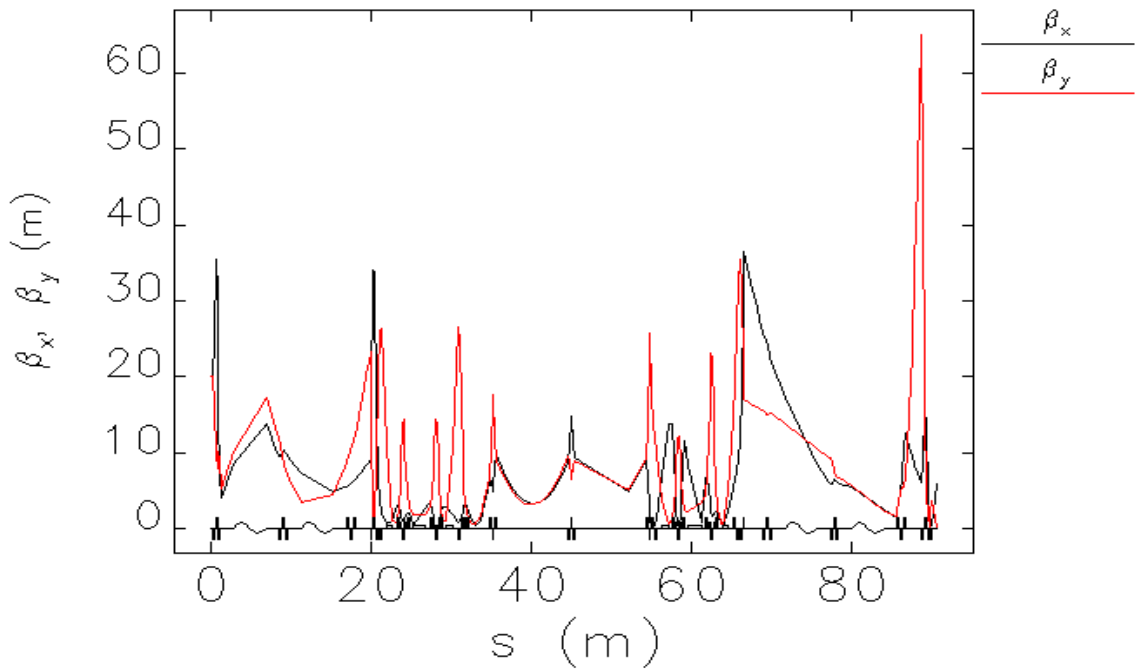


図 8.15 : リニアオプティクスのパータトロン関数

(直線部に4極電磁石を3台追加し、直線部以降でパータトロン関数を小さく抑えるように調整した場合)

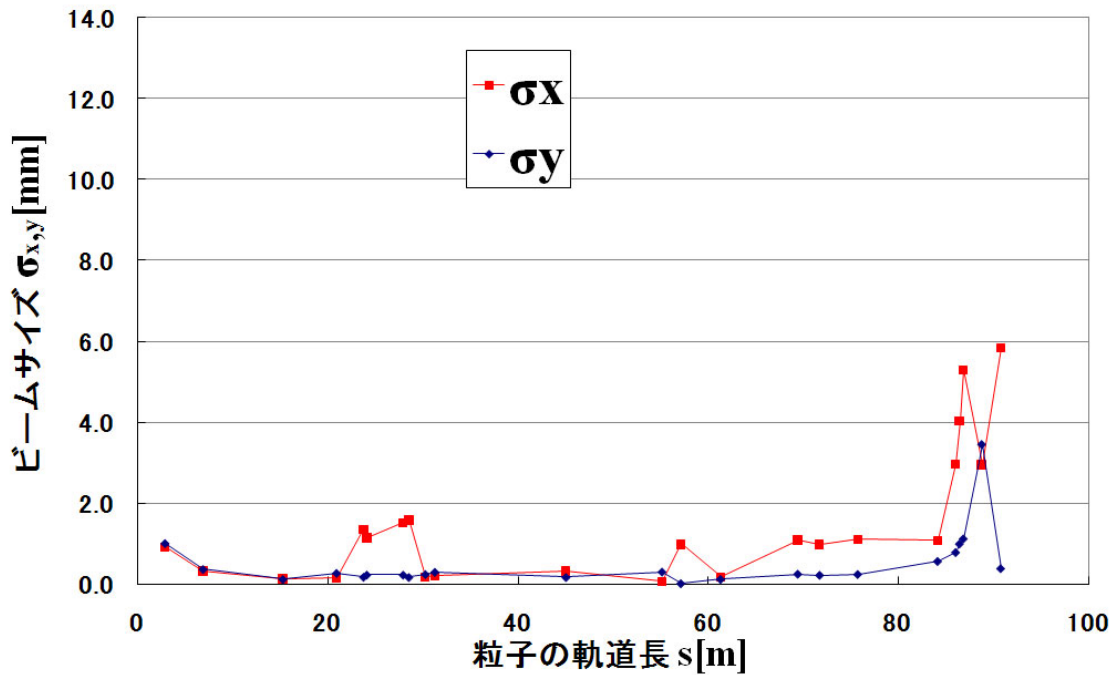


図 8.16 : 水平・垂直方向のビームサイズ

(図 8.15 と同じ調整をした場合)

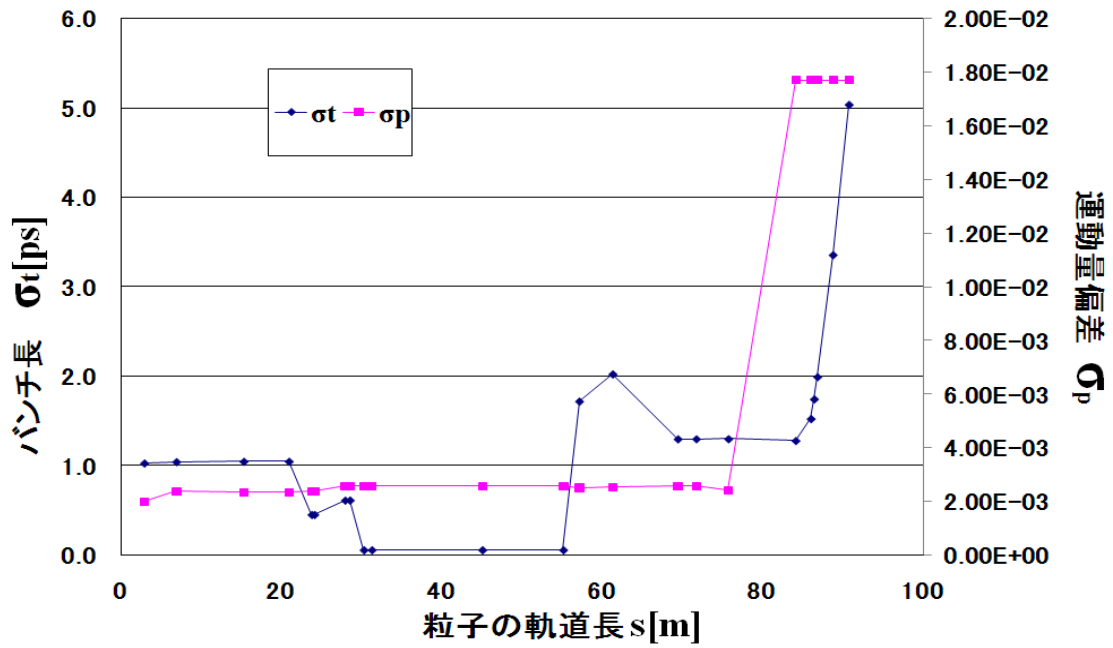


図 8.17 : バンチ長と運動量偏差
(図 8.15 と同じ調整をした場合)

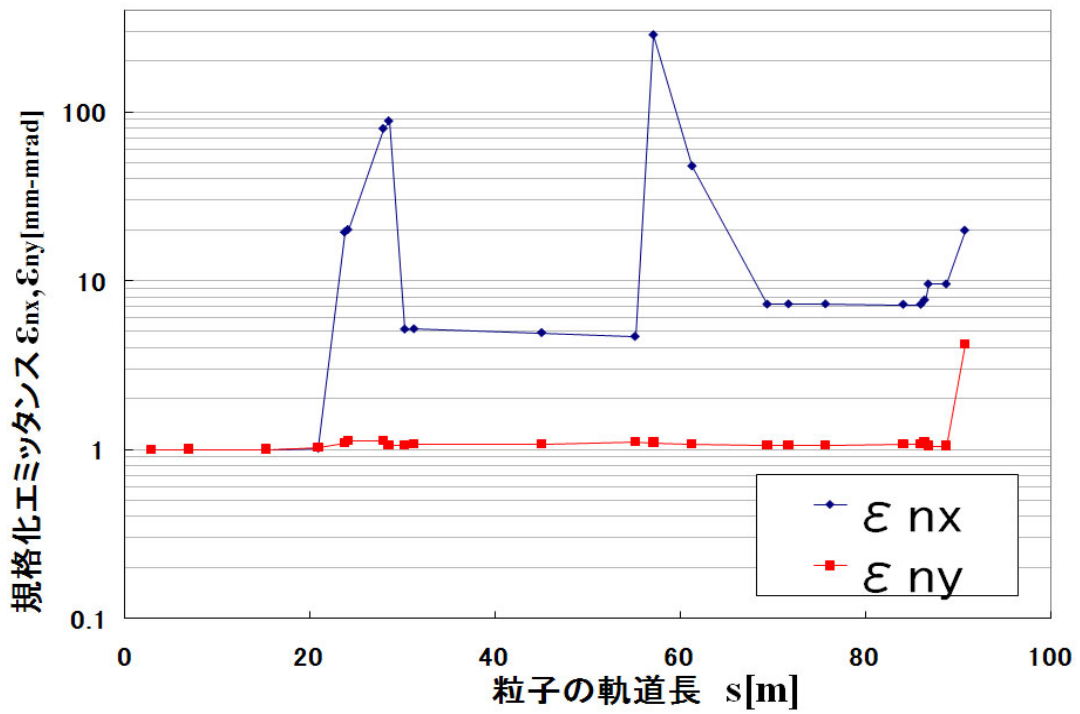


図 8.18 : 水平・垂直方向のエミッタンス
(図 8.15 と同じ調整をした場合)

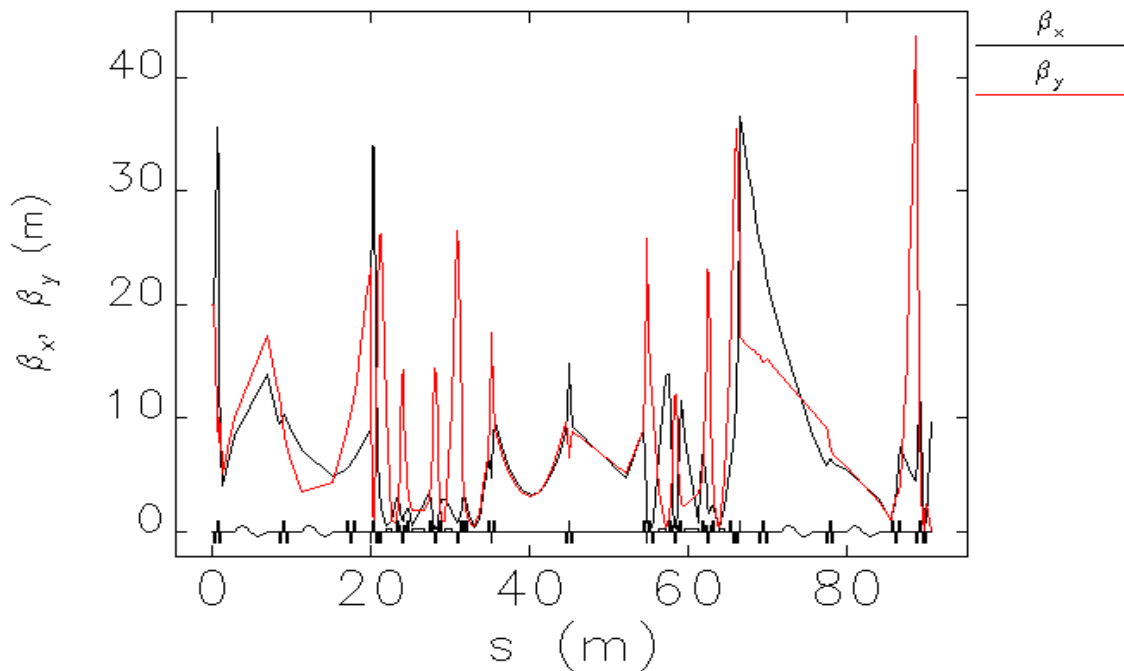


図 8.19 : リニアオプティクスのパータトロン関数

(図 8.15 の場合に加え、減速空洞の位相のずれを第 1 空洞、第 2 空洞ともに $+2^\circ$ ずらした
場合)

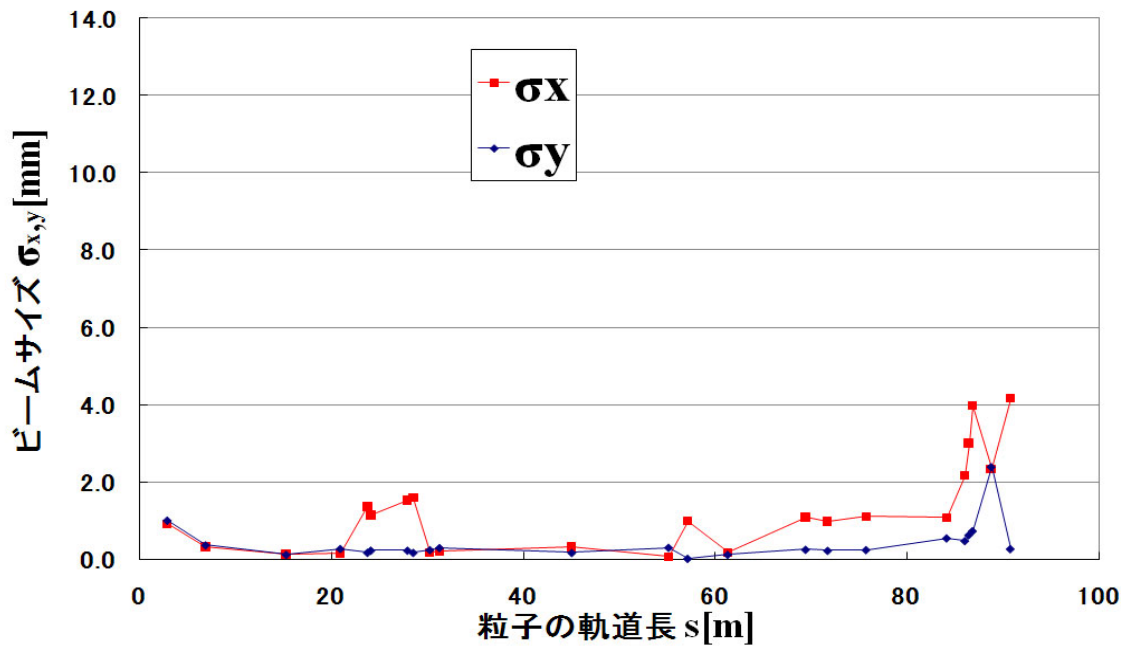


図 8.20 : 水平・垂直方向のビームサイズ

(図 8.19 と同じ調整をした場合)

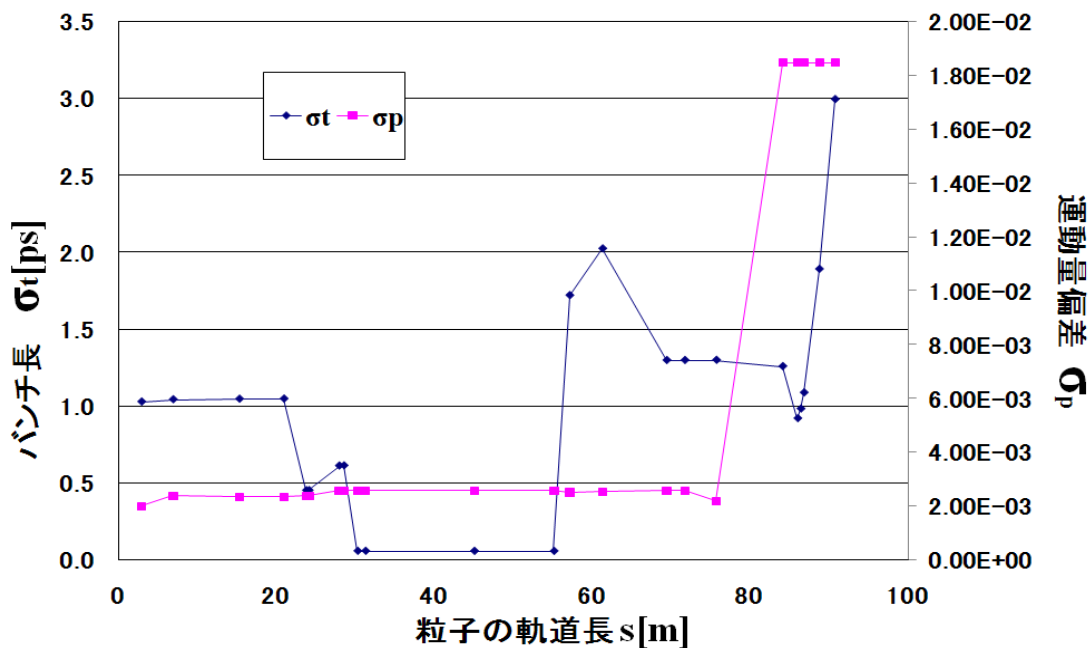


図 8.21 : バンチ長と運動量偏差
(図 8.19 と同じ調整をした場合)

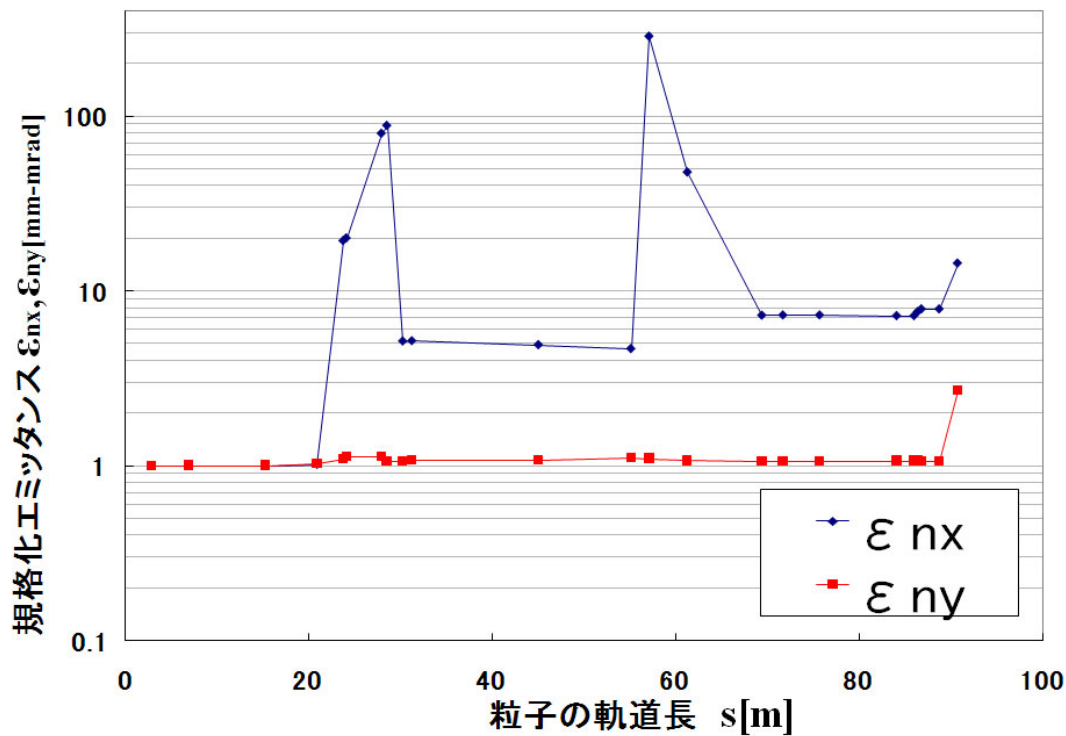


図 8.22 : 水平・垂直方向のエミッタンス
(図 8.19 と同じ調整をした場合)

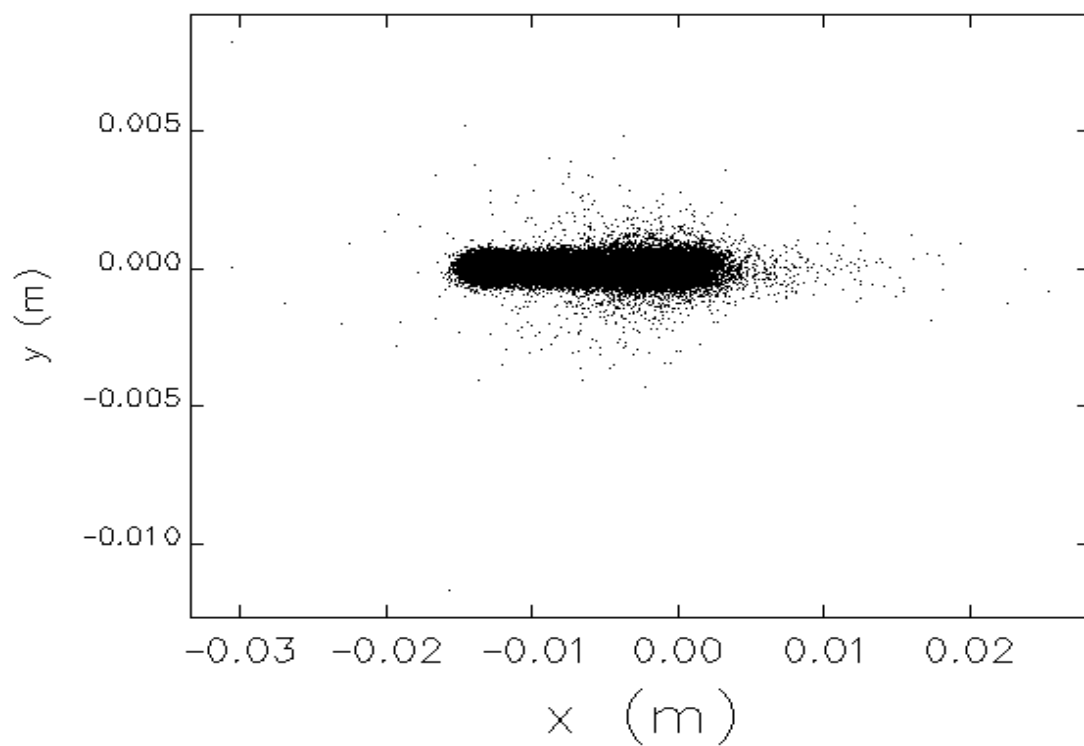


図 8.23 : ビームサイズ最大の場所での(x,y)電子分布
(図 8.19 と同じ調整をした場合)

8.5 初期バンチ長依存性

初期バンチ長の依存性を調べた。バンチ長以外の初期パラメータは表 8.2 のように取った。

表 8.2 : 初期パラメータ

バンチ長	1~3 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm-mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm-mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電子のエネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	14~16 [°]
R_{56}	0.1308

8.5.1 バンチ圧縮について

この節では初期バンチ長が 1 ps~3 ps の時について、バンチ圧縮に対する初期バンチ長の影響を比較する。図 8.24 に初期バンチ長と圧縮後のバンチ長をまとめ、そのプロットを図 8.24 に示す。初期バンチ長と最短バンチ長は簡単な関係ではないということが分かる。

それぞれ最短バンチ長の(t,p)プロットを図 8.25 示す。本来ならば式(4-57)より初期バンチ長が長い程 CSR 効果が小さくなり、バンチ長が短くなるはずである。そのため 1 ps から 2 ps になった時はバンチ長が短くなっている。しかし 2 ps と 3 ps を見比べると 2 ps の時の方が、最短バンチ長が短い結果となっている。図 8.25 を見ると初期バンチ長が 3 ps の時は最短バンチ長の形状から 3 次の形が見える。

次にCSRなしのプロットを図 8.26に示す。図 8.26よりCSRがない時の1 psはガウス分布を保持しているが、2 ps、3 psは3次の形が見える。初期バンチが長いほど加速後の運動量偏差の値が大きくなるため、式(8-1)の3次の項が無視できない値になると考えられる。しかし、初期バンチ長が長いほどCSR効果が小さくなるということもあり、3次の項とCSRの項の両方を考慮に入れた場合、2 psが一番良く圧縮された結果となったと考えられる。

表 8.3 : 初期バンチ長とその時に得られる最短バンチ長(第1アーク部通過直後)

初期バンチ長 [ps]	最短バンチ長[fs]	
	CSRあり	CSRなし
1	55.69	34.26
1.5	44.56	35.02
2	43.00	36.91
2.5	44.64	41.66
3	54.91	53.97

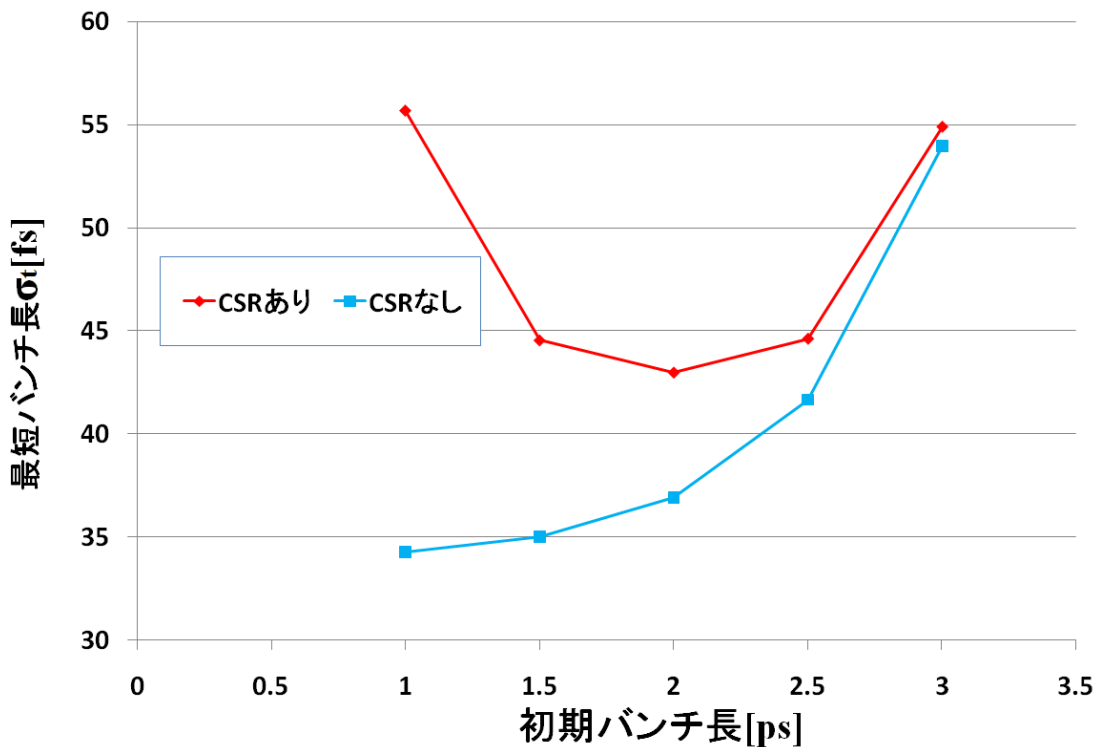


図 8.24 : 初期バンチ長と最短バンチ長の依存性

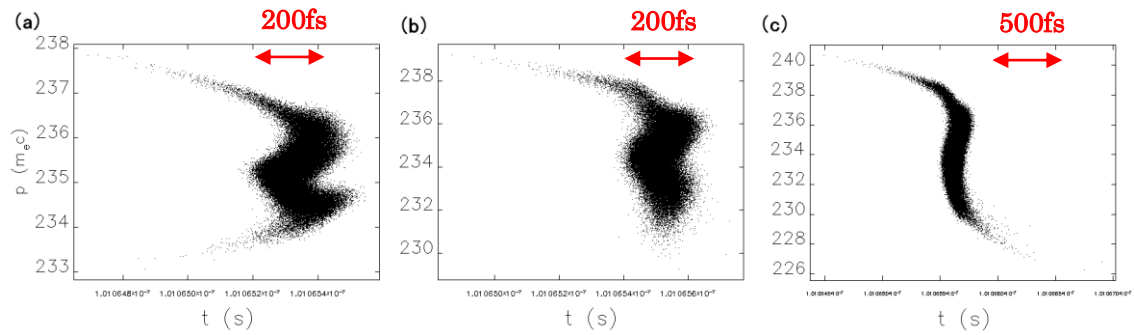


図 8.25 : 第 1 アーク部通過直後の(t,p)のバンチプロット(CSR あり)。

(a):初期バンチ長 1ps、(b):初期バンチ長 2ps、(c):初期バンチ長 3ps

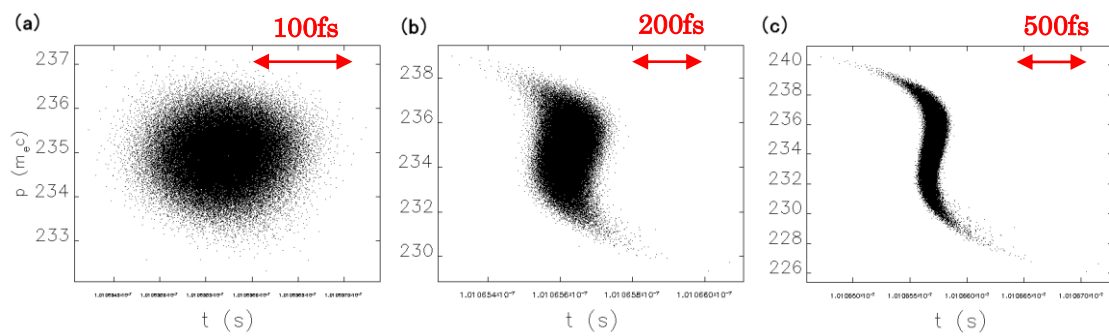


図 8.26 : 第 1 アーク部通過直後の(t,p)のバンチプロット(CSR なし)。

(a):初期バンチ長 1ps、(b):初期バンチ長 2ps、(c):初期バンチ長 3ps

8.5.2 ビームサイズとエミッタンス

ビームサイズとエミッタンスについて、2 ps 及び 3 ps のシミュレーション結果を図 8.27~図 8.32 に示す。

2 ps、3 ps とともにビームサイズが 1 ps の場合に比べ悪くなっている。また、バンチ長が長くなるほど減速後の運動量偏差が大きく、それによるバンチ長増加も顕著なものになっている。

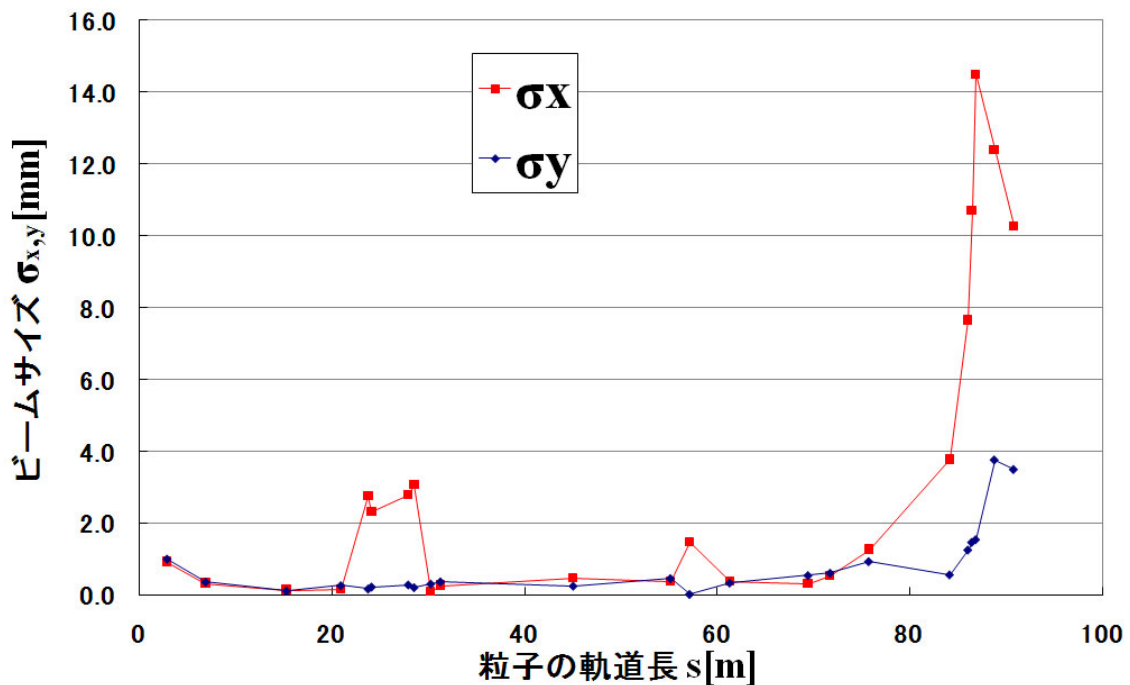


図 8.27 : 初期バンチ長 2ps 時の水平・垂直方向のビームサイズ

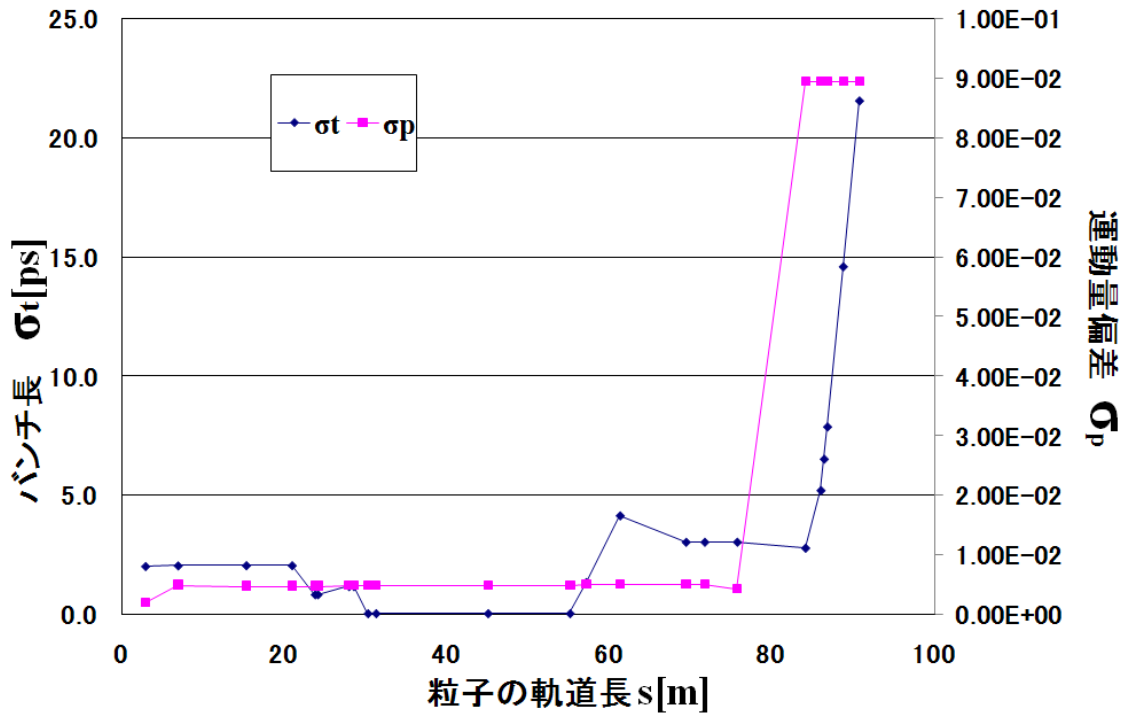


図 8.28 : 初期バンチ長 2ps 時のバンチ長・運動量偏差

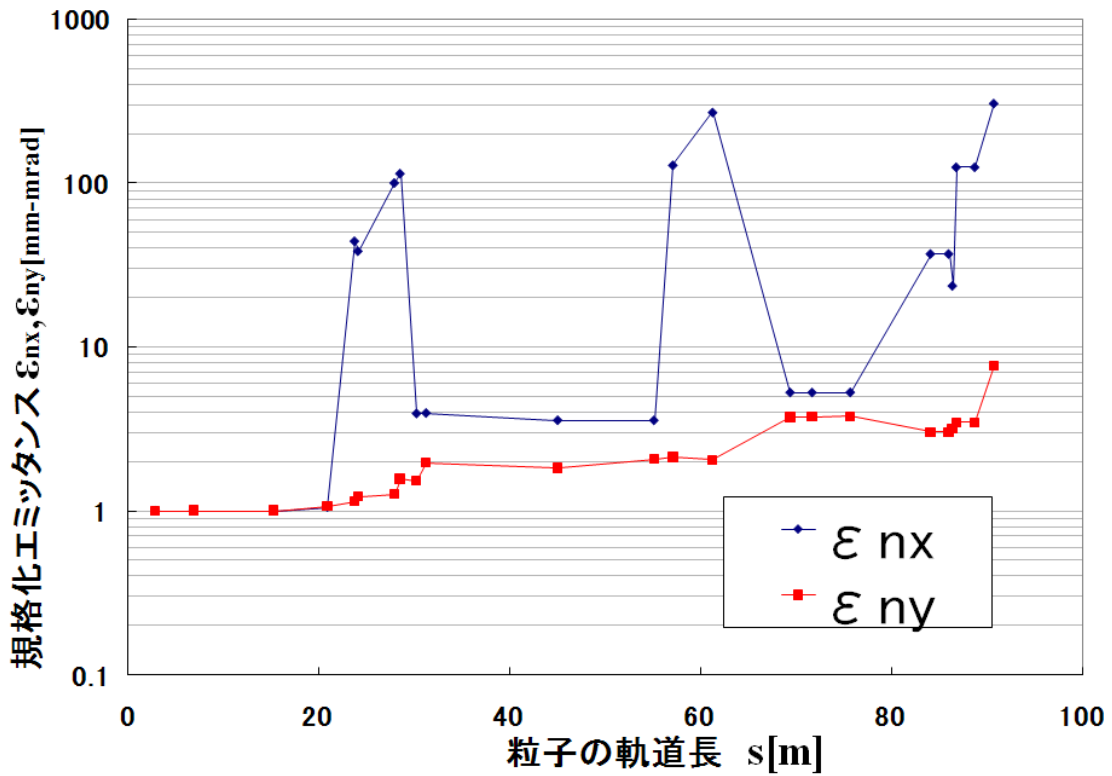


図 8.29 : 初期バンチ長 2ps 時の水平・垂直方向の規格化エミッタンス

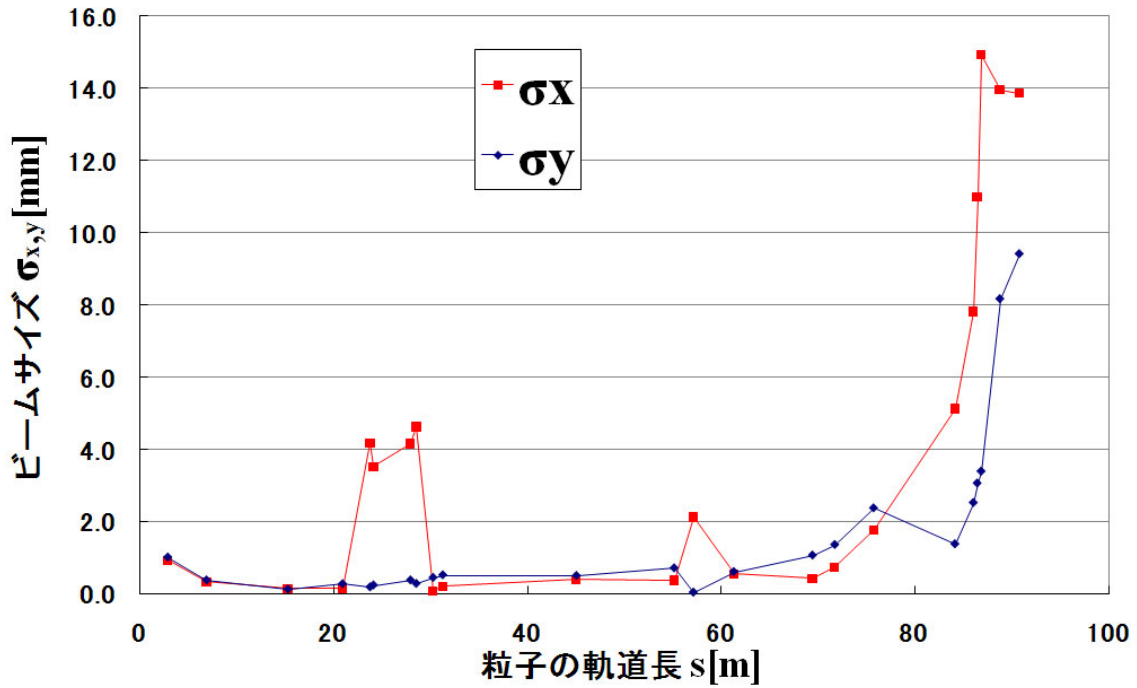


図 8.30 : 初期バンチ長 3ps 時の水平・垂直方向のビームサイズ

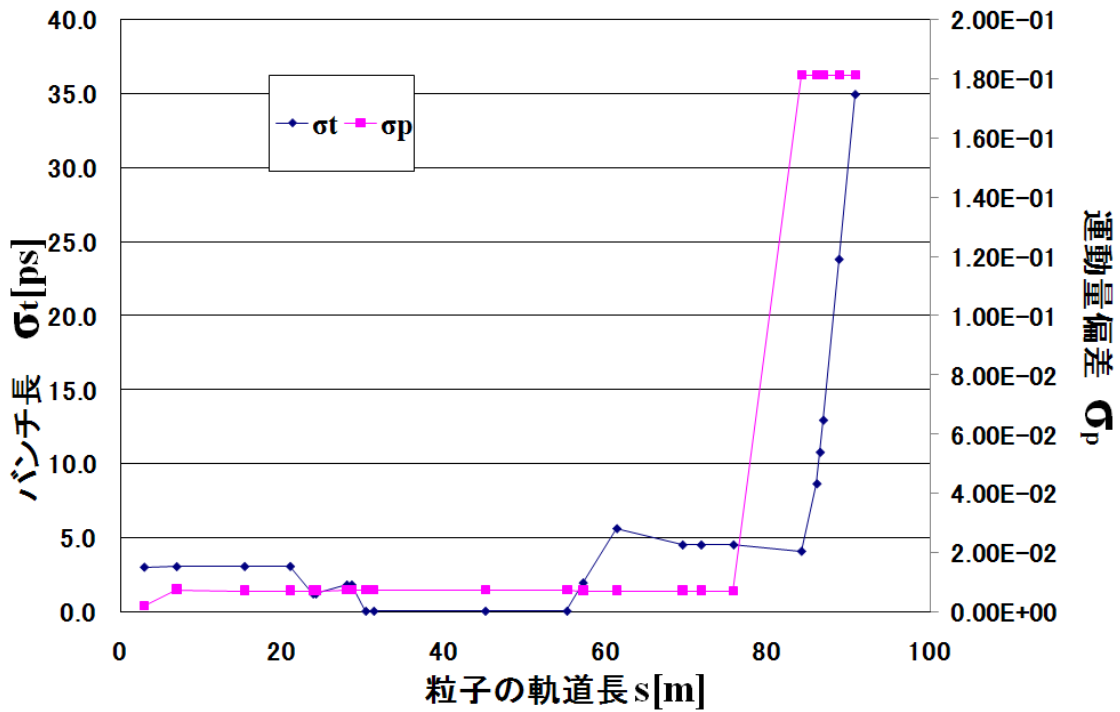


図 8.31 : 初期バンチ長 3ps 時のバンチ長・運動量偏差

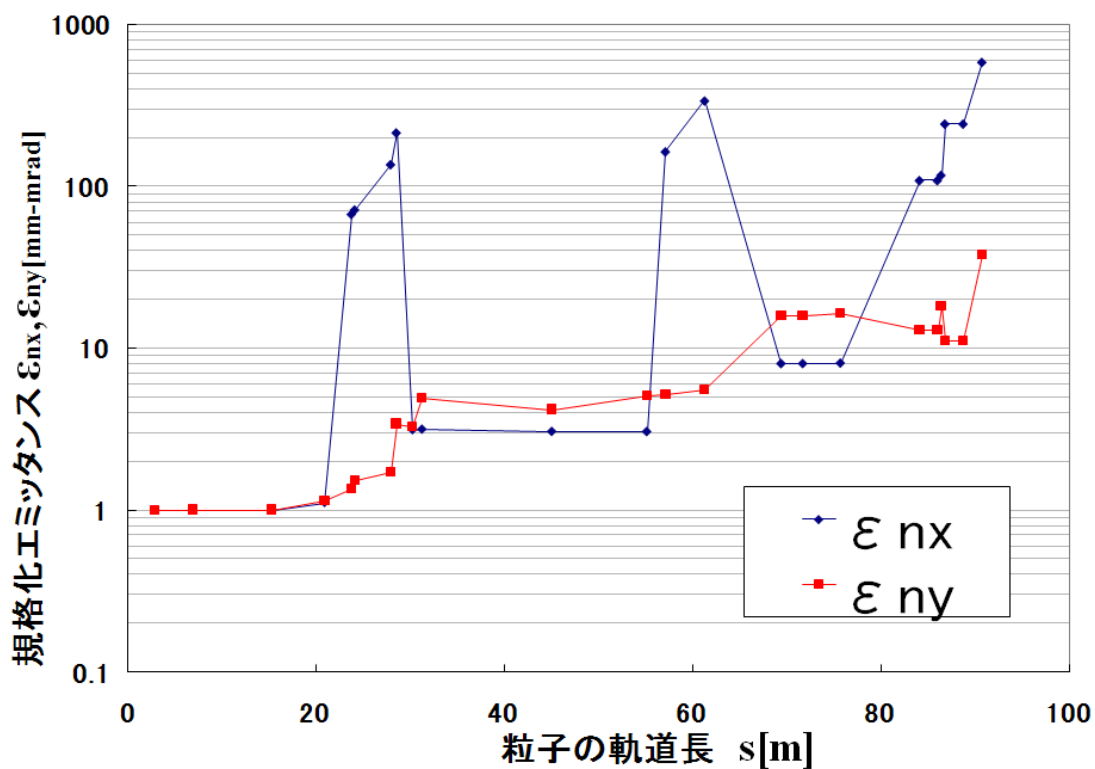


図 8.32 : 初期バンチ長 3ps 時の水平・垂直方向の規格化エミッタンス

8.6 エネルギー依存性

バンチ圧縮のエネルギー依存性を調べるため、加速空洞の加速勾配を 10 MV/m、15 MV/m、20 MV/m、すなわち加速後の電子エネルギーを 85 MeV、125 MeV、165 MeV と変えてシミュレーションを行った。まず基本となるパラメータを表 8.4 にまとめる。

表 8.4 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電子の初期エネルギー	5 [MeV]
加速勾配	10~20 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	85~165 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]

エネルギー依存性なので基本は加速勾配を変え、それに沿って加速位相からのずれや R_{56} 等を決定する。また、それに応じて 4 極電磁石や 6 極電磁石の値も変える。10 MV/m、15 MV/m、20 MV/m の 3 つの加速勾配についてシミュレーションを行い、それぞれのバンチ圧縮の結果の比較を表 8.5 に、その時の加速位相のずれと R_{56} を表 8.6 に示す。また、表 8.5 のプロットを図 8.33 に示す。

表 8.5 の CSR なしのバンチ長について見ると、加速後の電子のエネルギーが高いほどバンチ圧縮されている結果となっている。これは図 8.34 を見て分かるように、圧縮後のバンチ長は加速直後のエネルギー幅 ε に依るからである。圧縮後のバンチ長 σ_z を ε の関数として表すと

$$\sigma_z = R_{56} \times \varepsilon \quad (8-4)$$

となる。ここで ε は $\varepsilon = \Delta p_i / p$ であり、 Δp_i は加速前に与えられている運動量偏差である。そのため、加速後の p が大きくなるほど圧縮後のバンチ長は短くなる。

式(8-4)を計算してみる。初期バンチの運動量偏差は r.m.s 値で 2×10^{-3} に設定しているので $\Delta p_i = 0.01$ MeV となり、 $\varphi_{RF} = 15^\circ$ と設定しているので、 $R_{56} \approx 0.13$ となる。また、10 MV/m、15 MV/m、20 MV/m で加速された時の加速後の正確な電子の中心エネルギーは、それぞれ 81.54 MeV、120.05 MeV、159.55 MeV となる。これにより式(8-4)によるバンチ圧縮のバンチ長は 10 MV/m では 53.14 fs、15 MV/m では 36.09 fs、20 MV/m では 27.16 fs となり、これに近い値がシミュレーションから得られたことが分かる。

次に CSR がある場合だが、CSR なしとの差は 10 MV/m、15 MV/m、20 MV/m に対してそれぞれ 28.33 fs、21.42 fs、14.30 fs である。これは式(4-59)より、エネルギーが上がるほど CSR の影響が相対的に小さくなるためである。

表 8.5 : 最短バンチ長のエネルギー依存性(第 1 アーク部通過直後)

加速勾配 [MV/m]	加速後の 電子エネルギー[MeV]	最短バンチ長[fs]	
		CSR あり	CSR なし
10	85	78.30	49.97
15	125	55.69	34.26
20	165	42.74	28.44

表 8.6 : 表 8.5 におけるそれぞれの位相のずれ角と R_{56}

加速勾配[MV/m]	加速位相のずれ角[°]	R_{56}
10	14.35	0.1298
10(CSR なし)	15.41	0.1298
15	14.46	0.1310
15(CSR なし)	15.59	0.1310
20	14.16	0.1317
20(CSR なし)	15.69	0.1317

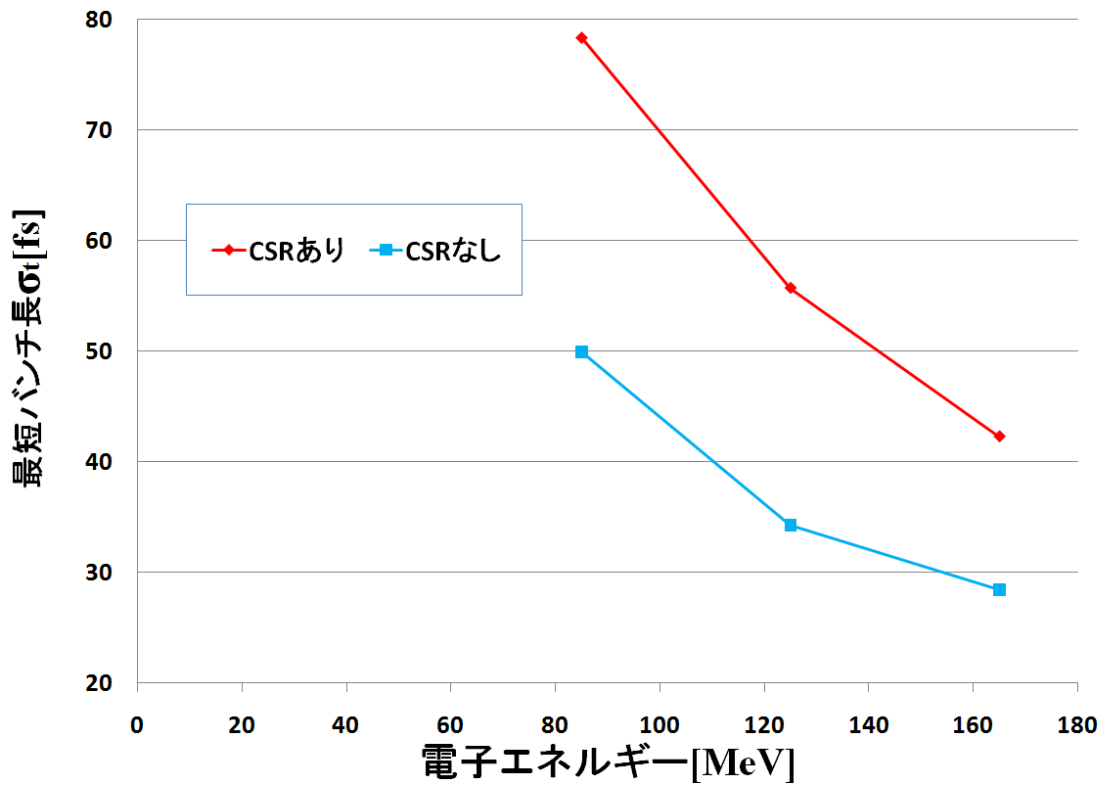


図 8.33 : 加速勾配と最短バンチ長の依存性

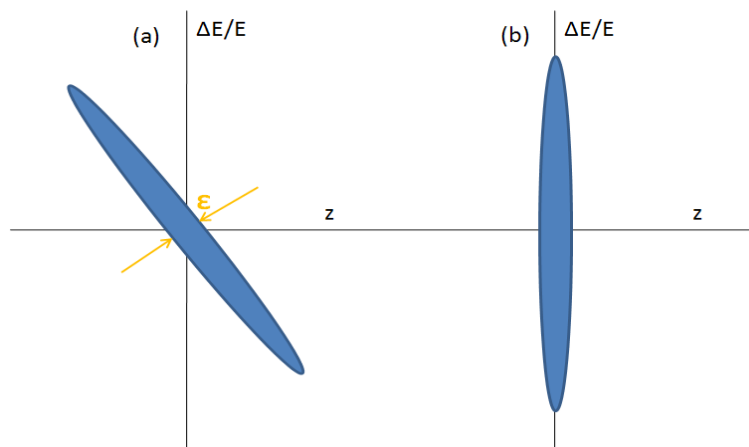


図 8.34 : バンチ長圧縮。

横軸はバンチ上の位置(右が前方)、縦軸はエネルギーのずれ。

(a):加速直後、(b):第 1 アーク部での圧縮後。

8.7 初期運動量偏差依存性

この節では初期運動量偏差の依存性について調べた結果を述べる。表 8.7 にシミュレーションのための初期パラメータを、表 8.8 に各初期運動量偏差ごとのバンチ圧縮のシミュレーション結果を示す。また、表 8.8 のプロットを図 8.35 に示す。

CSR がない場合、 $5 \times 10^{-4} \sim 2 \times 10^{-3}$ の間ではほ式(8-4)通りの値である。ただし、 1×10^{-4} では形状が3次の形状をしていて、高次の項の影響で理論値より高い値になったと思われる。CSR 効果がある場合、運動量偏差が小さくなるとともに最短バンチ長も短くなるが、初期運動量偏差が小さくなると飽和してくることが分かる。従って、必要以上に初期運動量偏差を小さくしてもあまりバンチ圧縮に対して意味がない。

表 8.7 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
運動量偏差	$1 \times 10^{-4} \sim 1 \times 10^{-2}$
電荷量	77 [pC]
電子のエネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	14~16 [°]
R_{56}	0.1308

表 8.8 : 最短バンチ長の初期運動量偏差依存性(第 1 アーク部通過直後)

初期運動量偏差	最短バンチ長[fs]	
	CSR あり	CSR なし
1×10^{-4}	45.70	3.75
5×10^{-4}	46.30	9.34
1×10^{-3}	48.44	17.64
2×10^{-3}	55.69	34.26
5×10^{-3}	84.16	76.64
1×10^{-2}	116.56	117.98

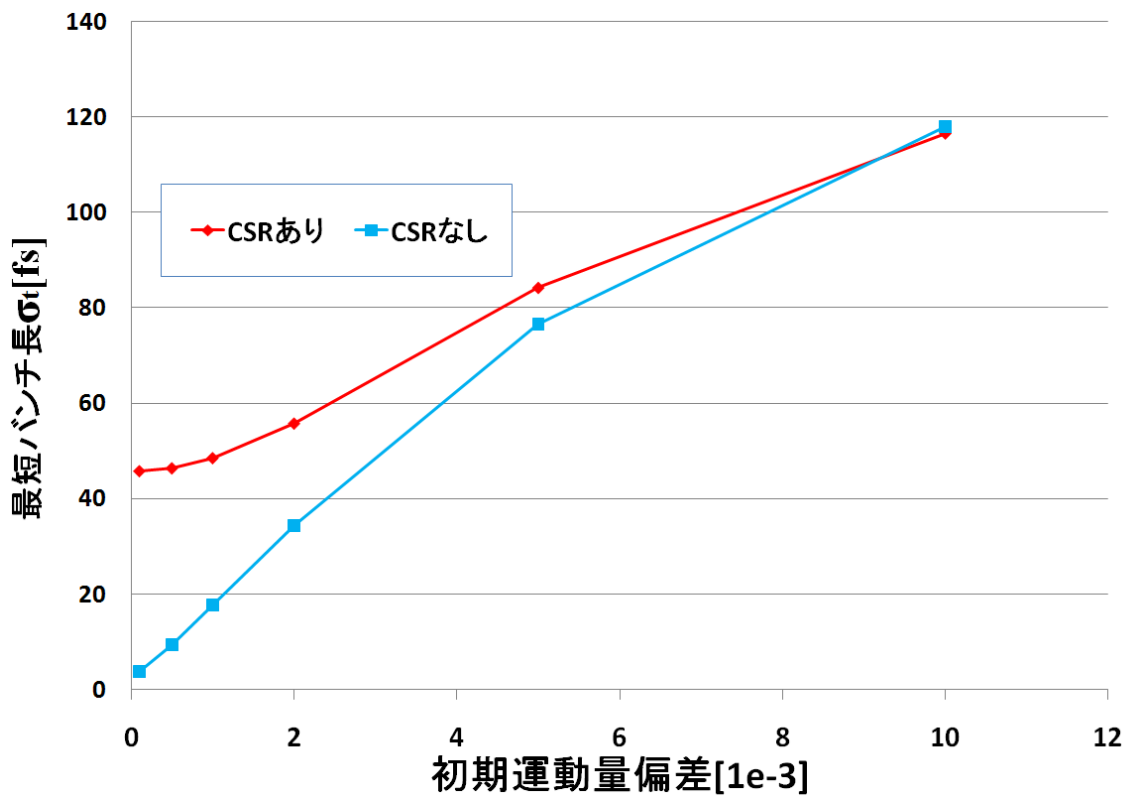


図 8.35 : 初期運動量偏差と最短バンチ長の依存性

8.8 初期エミッタンス依存性

初期エミッタンスの依存性について述べる。初期パラメータを表 8.9 に、バンチ圧縮のシミュレーション結果を表 8.10 に示す。また、表 8.10 のプロットを図 8.36 に示す。図 8.36 から分かるように、バンチ圧縮する際には初期エミッタンスが小さすぎてもバンチ圧縮にとっては良くない。3~4 mm-mrad の間に最短バンチ長にとっての最適な値がある。

表 8.9 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	0.1~10 [mm-mrad]
垂直規格化エミッタンス	0.1~10 [mm-mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電子のエネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	14~16 [°]
R_{56}	0.1308

表 8.10 : 初期のエミッタンスに沿った最短バンチ長

初期エミッタンス [mm-mrad]	第1アーク部通過直 後のバンチ長[fs]	第1アーク部通過直後の ϵ_{nx} [mm-mrad]
0.1	68.65	7.905
0.5	59.05	5.696
0.8	56.67	5.279
1	55.69	5.187
1.5	54.06	5.202
2	53.20	5.400
2.5	52.26	5.685
3	52.39	6.020
3.5	52.35	6.379
4	52.45	6.758
5	52.95	7.542
10	59.10	11.82

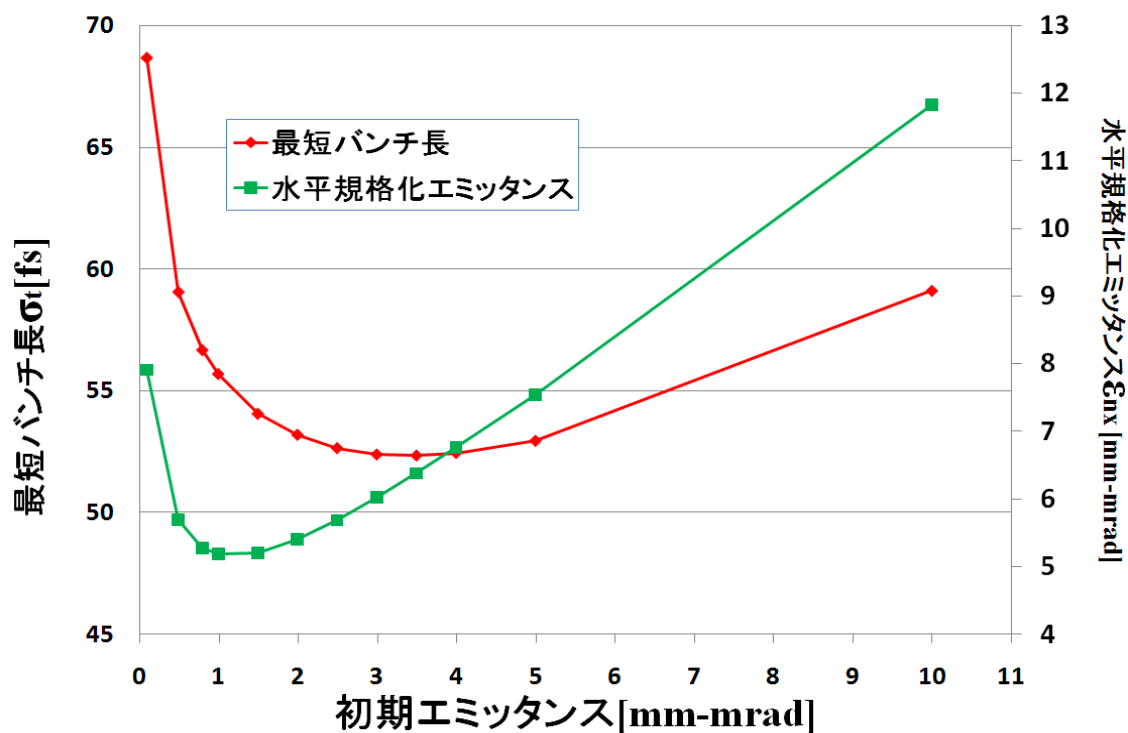


図 8.36 : 初期エミッタンスと最短バンチ長・直線部の水平規格化エミッタンスの依存性

8.9 電荷量依存性

この節では電荷量の依存性について述べる。初期パラメータは表 8.11 に、バンチ圧縮のシミュレーション結果を表 8.12 に示す。また表 8.12 のプロットを図 8.37 に示す。

電荷量が上がると線形的に圧縮後のバンチ長が伸びていき、エミッタンスも非常に悪くなる。また、770 pC ではシミュレーションからビームロスが非常に大きくなることが分かった。参考として CSR なしでの 385 pC と 770 pC のシミュレーションを行った結果、最短バンチ長はどちらも 34.26 fs となり、ほぼ 77 pC の時と同じ値を示した。また、ビームサイズもダンプまで大きくなる場所がなく最大でも 4 mm(rms)であった。

式(4-45)より電荷量が上がると電荷線密度 $\lambda(s)$ もそれに応じて上昇し、CSR によるエネルギー変化量が増える。運動量偏差が大きく変わるとアーク部での行路差に悪影響を与える。そのため、電荷量増加による CSR 効果の増大が大電荷でのバンチ圧縮を難しくしている。

バンチのエネルギーが高ければ相対的に CSR 効果が小さくなることは前に述べたが、今回コンパクト ERL では加速後で高々 125 MeV 程度であるために、電荷量を上げた時の CSR によるバンチへの影響が非常に大きい。5 GeV クラスの実機ではエネルギーが相対的に高いので、770 pC でも $\sigma_z < 100$ fs は不可能ではないと期待できる。しかし、CSR 自体の絶対値が小さくなったわけではないため、減速後の運動量偏差及びバンチ長、ビームサイズが非常に悪い状況になる。5 GeV クラスの実機でも、減速後においてビームロスをしないということが課題になると思われる。

表 8.11 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	0.1~10 [mm-mrad]
垂直規格化エミッタンス	0.1~10 [mm-mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	7.7~770 [pC]
電子のエネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	125 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	14~16 [°]
R_{56}	0.1308

表 8.12 : 電荷量に沿った最短バンチ長

電荷量 [pC]	第1アーク部通過直 後のバンチ長[fs]	第1アーク部通過直後の ϵ_{nx} [mm-mrad]
7.7	34.25	1.133
77	55.69	5.187
154	99.84	12.107
231	167.73	21.242
385	243.12	51.520
770	307.57	174.449

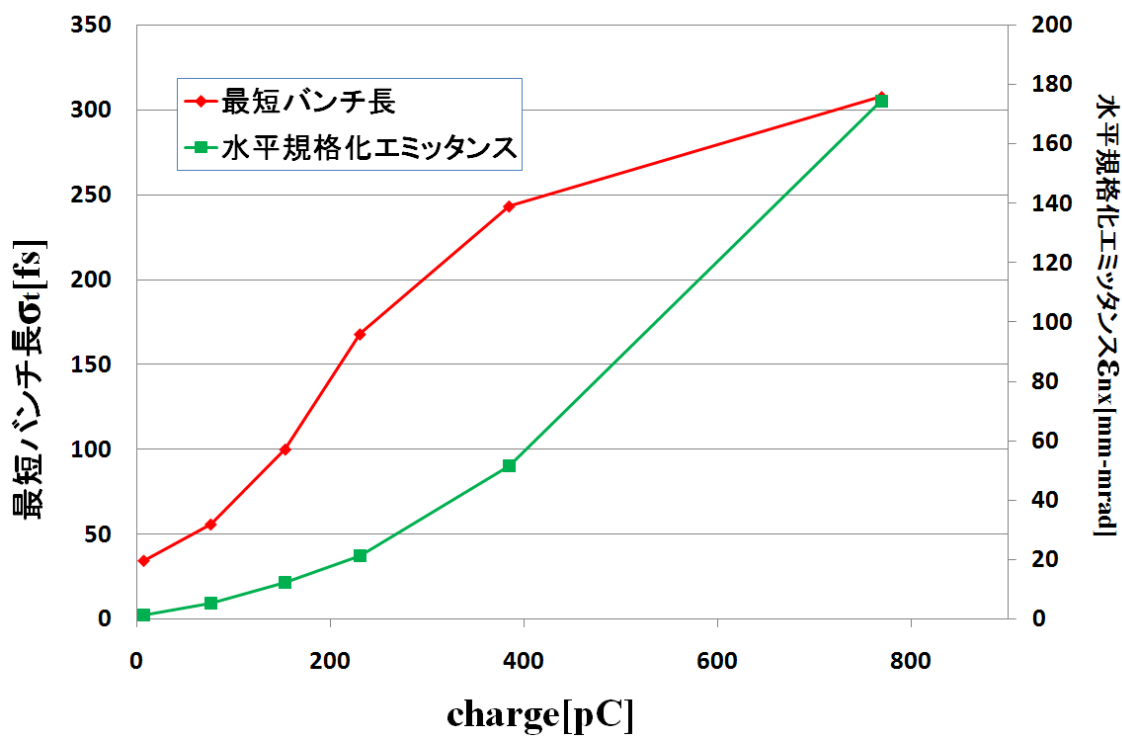


図 8.37 : 電荷量と最短バンチ長・水平規格化エミッタンスの依存性

9章 結論

コンパクト ERL の周回部のシミュレーションを行い、大電流モード、バンチ圧縮モード、低エミッタンスモードで、それぞれの目的が達せられ、ほぼビームロスのないオプティクスを設計することに成功した。大電流モードでは、初期エミッタンス $1 \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ 、初期バンチ長 $2\text{-}3\text{ps}$ 、電流 100 mA 、加速勾配 15 MV/m (ビームエネルギー 125 MeV)においてエミッタンスの増加を直線部で $10\sim 20\%$ 程度に抑えることができた。また、低エミッタンスモードでは、初期エミッタンス $0.1 \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ 、初期バンチ長 3 ps 、電流 10 mA 、加速勾配 15 MV/m (ビームエネルギー 125 MeV)において、エミッタンス増加を直線部で 3% 程度に抑えた。バンチ圧縮モードでは、電荷量 77 pC 、加速勾配 15 MV/m (ビームエネルギー 125 MeV)、初期バンチ長 2 ps において、バンチ長 43 fs まで圧縮することに成功した。また、バンチ圧縮について各パラメータの依存性を求めた。電荷量を大きく増やした場合に CSR の影響をいかに抑えるかが課題となる。

謝辞

本論文を作成するにあたり、多くの方にお世話になりました。指導教員である中村典雄先生には本研究について、さまざまな指導をして頂きました。また、学会発表や論文作成に対しても多くの助言をしていただきまして、心から感謝を申し上げます。**ERL**のビームダイナミクスグループの皆様には大変お世話になりました。日本原子力研究開発機構の羽島さんには軌道計算コード **elegant** の使い方から周回軌道の計算方法や**CSR**の効果等について多くの助言を頂きました。高エネルギー加速器研究機構の原田さんにはビーム力学についての助言や、本研究のコンパクト **ERL**の基となる設計案を頂きました。島田さんには**CSR**を含んだ周回軌道の最適化方法の助言を頂きました。また、東京大学物性研究所軌道放射物性研究施設の皆様にも大変お世話になりました。阪井さん、高木さん、伊藤さんにはゼミを通じてビーム力学の基礎を多く教えて頂き、本研究の大きな礎となりました。2年間ともに学んできた川崎泰介君には大変お世話になりました。**APS(Advanced Photon Source)**の **Dr. M. Borland** は本研究で使用したコード **elegant** の製作者であり、**elegant** の使用方法に関して助言を頂き大変感謝しております。

多くの人にお世話になりました。皆様に心から感謝いたします。

Appendix

Appendix A バンチ圧縮モードの設計方法

まず初めにバンチ圧縮モードの基本となる設計方法を記述する。バンチ圧縮は5章に記述した方針に沿って行う。表 A.1 に初期パラメータを示す。この節では 20 MV/m の場合において述べる。

表 A.1:初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm-mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm-mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電子の入射エネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	20 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	165 [MeV]
主加速モジュール台数	2 [台]
加速空洞長	8 [m]
加速位相のずれ角	15 [°]
R_{56}	0.1419

圧縮の方法はバンチの加速時に敢えてバンチ前後のエネルギー差を生じさせ、そのエネルギー差を偏向電磁石中の R_{56} を用い行路差に変換し圧縮する方法である。そのため加速位相からのずれを 15° と設定した。その時必要となる R_{56} の値は式(8-2)より 0.1419 と求められる。実際にこの設定でシミュレーションを行った結果を図 A.1 に示す。

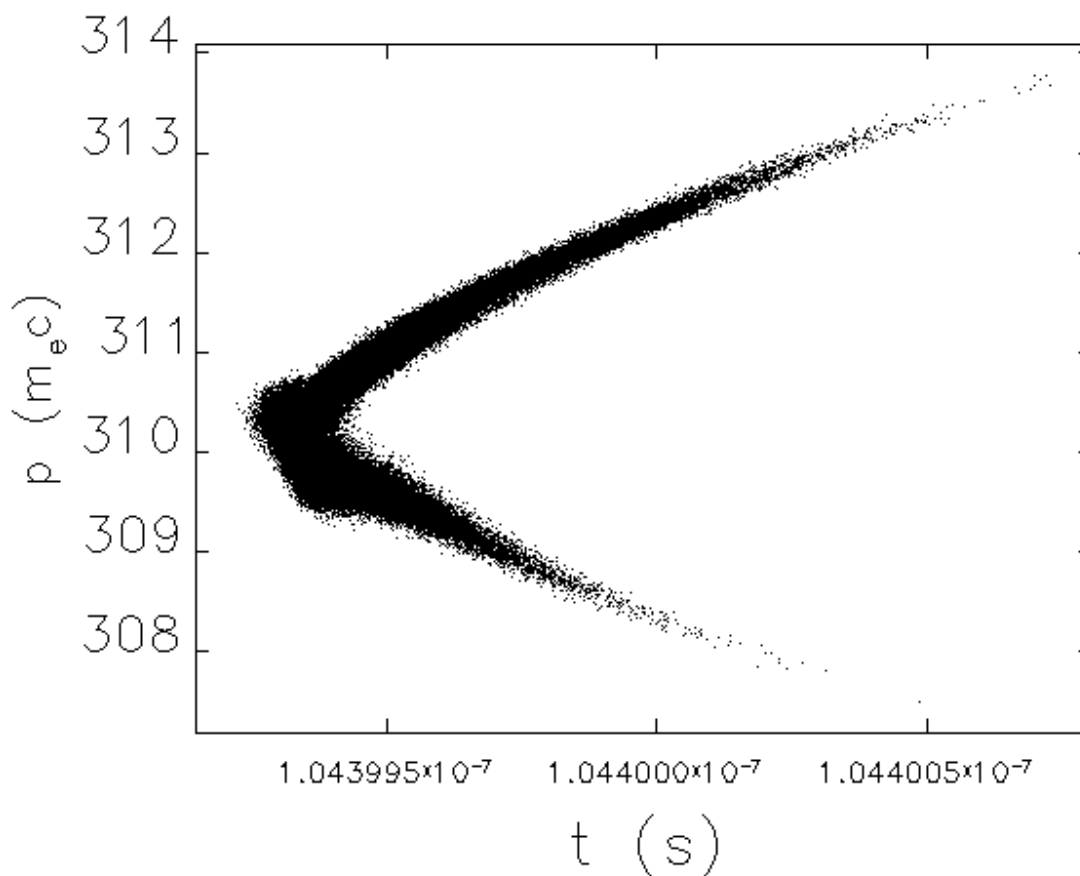


図 A.1 : 表 A.1 のパラメータで行ったシミュレーション結果の(t,p)。
場所 は 第 1 アーク部の通過直後。

図 A.1 の結果ではまだ 2 次以上の補正が出来ていないことが分かる。バンチ長も 180.7 fs(rms)と 100 fs 以下という目的まで達していない。2 次の補正を行うため、6 極電磁石を追加し T_{566} を適当な値に最適化しなくてはならない。

そのため次に 6 極電磁石を追加しさらにバンチ長が最短となるようにシミュレーションを行った結果を図 A.2 に示す。

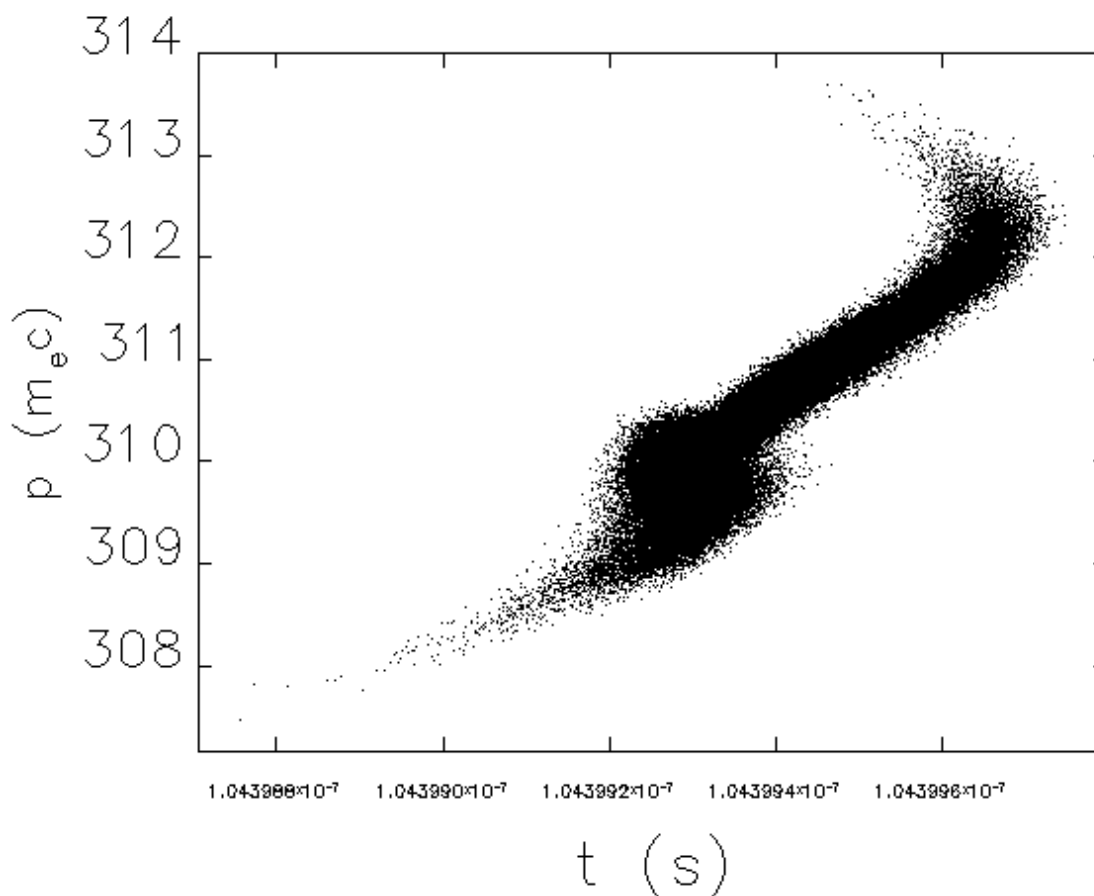


図 A.2 : 6 極電磁石を加えてバンチ長が最短となるように調整した結果

図 A.2 の結果としてはバンチ長が 125.3 fs(rms) となった。しかし、明らかに形状からまだまだ圧縮がし切れてないということが分かる。5 章で述べた、バンチと加速電場の速度差を考慮に入れなければいけないという事がある。形状からも R_{56} の値が最短となる値よりも高かったものと推測できる。これにより速度差を考慮し、より圧縮出来ると思われる R_{56} を Appendix B の数値計算より求めると、 $R_{56} = 0.1316$ という結果が得られた。図 A.3 ではこの値で行ったシミュレーション結果を示す。

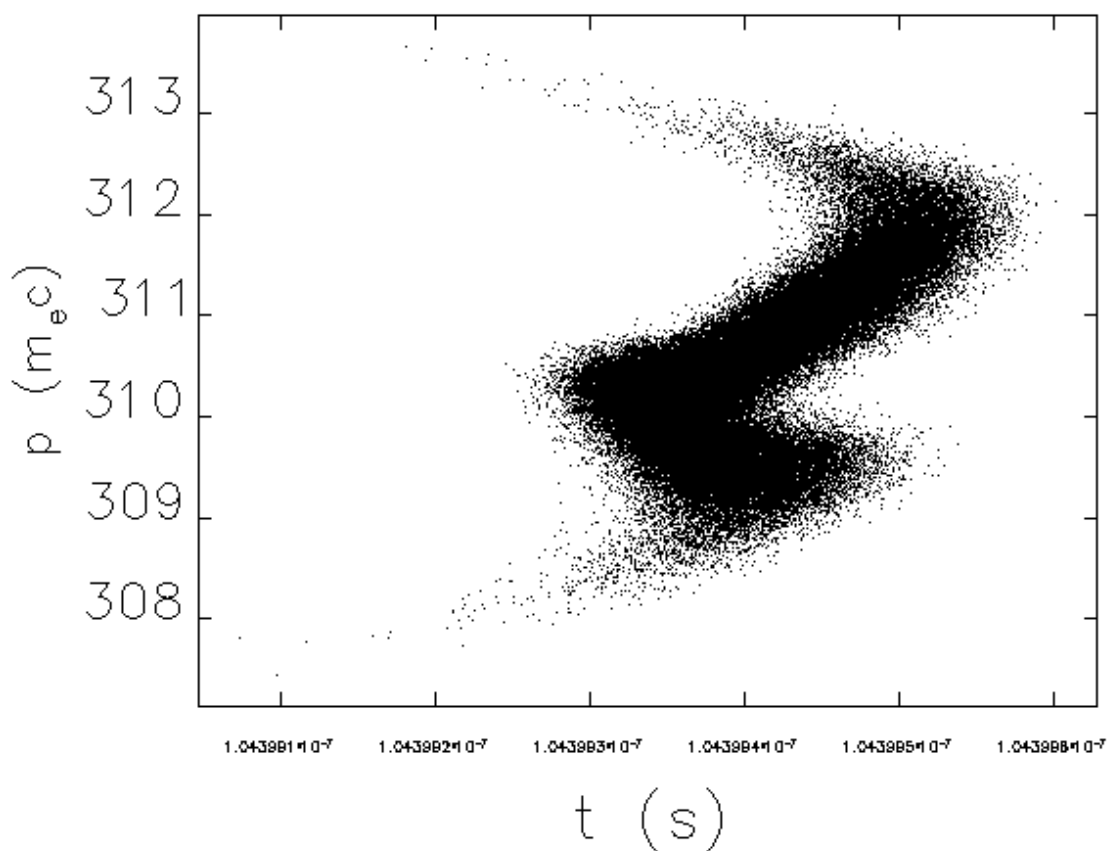


図 A.3 : $R_{56} = 0.1316$ に変更した結果。

バンチ長は 58.9 fs(rms) まで圧縮された。単純に式(8-2)を使えば圧縮できるわけではなく、速度差を含めて最適化しなければならないということが分かる。

しかし、まだこれでも十分ではなく、数値計算から出した R_{56} が最短バンチ長を与えるとは限らない。なぜなら CSR によってエネルギーを失うことがありエネルギーが増減するからである。そのため R_{56} の値は 0.1316 に保ったまま、6 極電磁石と加速位相を調整することによってバンチの最適化を行う。その結果を図 A.4 に示す。

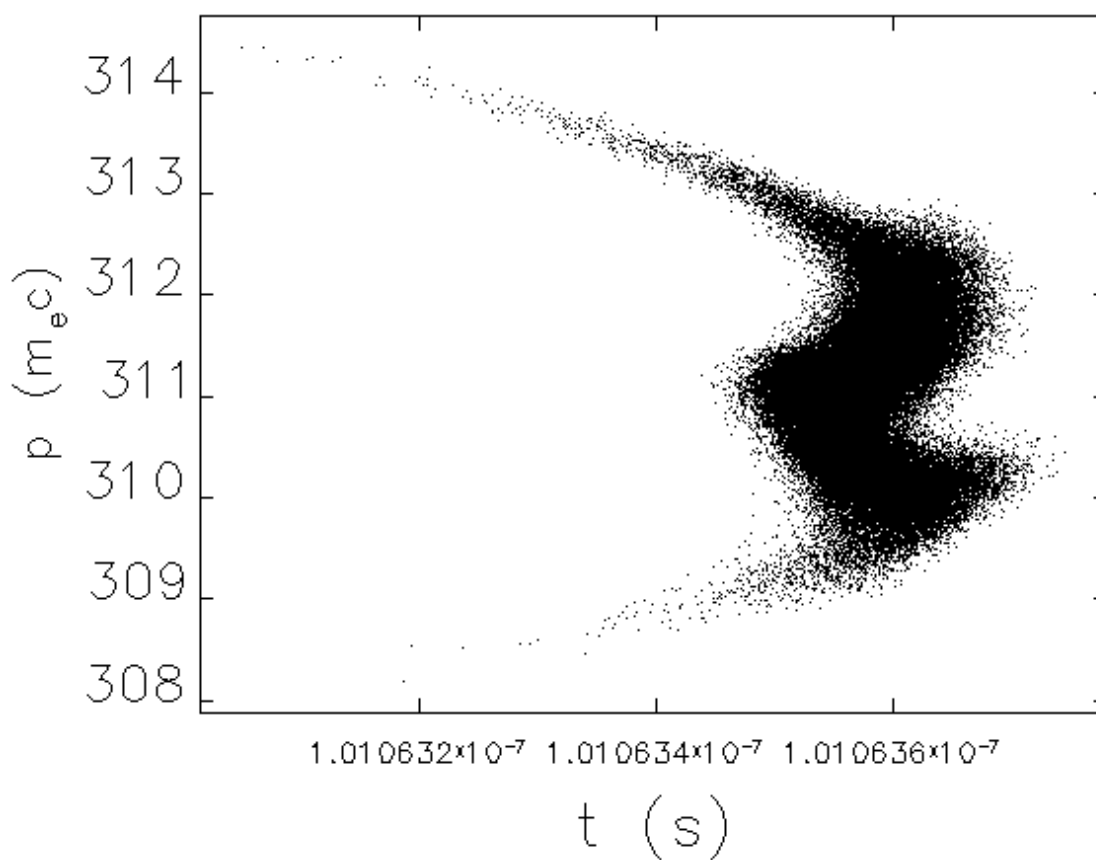


図 A.4 : 6 極電磁石と加速位相をバンチ長が最短となるように調整した結果。

6 極電磁石と加速位相をバンチ長が最短となるように調整した結果、図 7.4 のようになり、バンチ長は 42.74 fs(rms) となった。加速モジュールは 2 つあるが、2 つ目の加速モジュールでは既にバンチは加速電場との速度差がほぼ生まれないうほど高速にまで達しているため、2 つ目の加速モジュールでは位相のずれを 15° に固定し、1 つ目の加速モジュールの位相のずれを調整した。他の場合もバンチ圧縮については同様の流れで行った。

Appendix B バンチ圧縮モードでの R_{56} の算出

圧縮に必要な R_{56} の算出について、まずは簡単のためにバンチと加速電場に速度差がないものとして計算を行う。

まず加速時に敢えて山からずらして勾配を与えた時の Δz と ΔE の傾きは

$$\Delta z k_{RF} E_0 \sin \phi_{RF} = \Delta E \quad (\text{B.1})$$

ここで k_{RF} は加速周波数、 E_0 は加速電場の電位である。式(B.1)の両辺を加速後のビームエネルギー、 $E_{tot} = E_i + E_0 \cos \phi_{RF}$ 、で割り (E_i は初期のビームエネルギー)、 $\phi_{RF} \ll 1$ 、 $E_i \ll E_0 \Rightarrow E_{tot} \approx E_0$ という近似を使うと

$$\Delta z = \frac{1}{k_{RF} \sin \phi_{RF}} \frac{\Delta E}{E_{tot}} \quad (\text{B.2})$$

となる。これが加速時に与えられるエネルギー勾配依存の傾きである。これを

R_{56} を用い、 Δz が最少になるようにする。 R_{56} は $\Delta z = -R_{56} \frac{\Delta E}{E_{tot}}$ で与えられてい

るので

$$k_{RF} \sin \phi_{RF} = \frac{1}{R_{56}} \quad (\text{B.3})$$

とすると Δz が最小となる。

次にバンチと加速電場の速度差を考慮に入れた式を導出する。加速時に与えられる傾きは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N k_{RF} \frac{E_0}{N} \sin \phi_{RF_n} \right) \Delta z = \Delta E \quad (\text{B.4})$$

である。ここで ϕ_{RF_n} は次のように与えられる。

$$\phi_{RF_n} = \phi_{RF_{n-1}} + \frac{L}{N+1} \left(\frac{\frac{\varepsilon_{n-1}}{m_e c^2}}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{m_e c^2} \right)^2 - 1}} - 1 \right) k_{RF}, \quad (\text{B.5})$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \frac{E_0}{N} \cos(\phi_{RF_n})$$

ϕ_0 は初期として与えられた位相のずれ角であり、 ε_n はビームエネルギーで、

$\varepsilon_0 = E_i$ である。先と同じように式(B.4)の両辺を $E_{tot} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(E_i + \sum_{n=1}^N \frac{E_0}{N} \cos \phi_{RF_n} \right)$ で

Appendix B

割ると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{E_0}{N} \sum_{n=1}^N k_{RF} \sin \phi_{RF_n}}{E_i + \frac{E_0}{N} \sum_{n=1}^N \cos \phi_{RF_n}} \Delta Z = \frac{\Delta E}{E_{tot}} \quad (\text{B.6})$$

となるため、 ΔZ が最少になるような R_{56} は

$$R_{56} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_i + \frac{E_0}{N} \sum_{n=1}^N \cos \phi_{RF_n}}{\frac{E_0}{N} \sum_{n=1}^N k_{RF} \sin \phi_{RF_n}} \quad (\text{B.7})$$

で与えられる。

Appendix C 主加速モジュール 3 台のシミュレーション

ョン

コンパクト ERL では、主加速モジュールを 3 台置くことも検討されている。この節では主加速モジュール 3 台にした場合の大電流・バンチ圧縮モードのシミュレーション結果を示す。

C.1 大電流モードのシミュレーション結果

主加速モジュール 3 台の時のパラメータを表 C.1 に、ラティス配置を図 C.1 に示す。この時のシミュレーション結果を、リニアオプティクスの変位関数を図 C.2 に、ビームサイズ・バンチ長と運動量偏差・エミッタンスをそれぞれ図 C.3、図 C.4、図 C.5 に示す。エミッタンス増大は直線部で 1.65 mm·mrad となっており、加速モジュール 2 台での結果である図 6.9 と比べるとエミッタンス増大は抑えられている。また、エネルギー回収率は表 C.2、表 C.3 に示す。高回収率が実現できている。

表 C.1 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電流	100 [mA]
電子の入射エネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	185 [MeV]
主加速モジュール台数	3 [台]
加速空洞長	12 [m]
加速位相のずれ角	-2.0 [°]
R_{56}	0

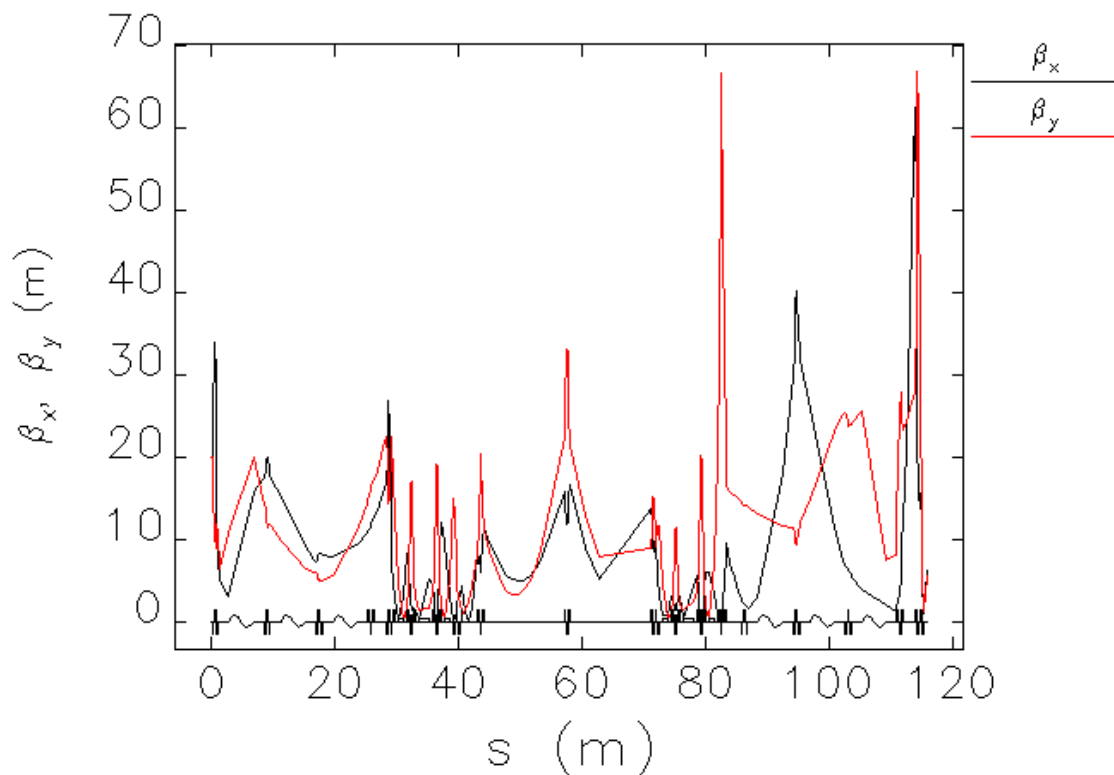


図 C.1 : リニアオプティクスのベータatron関数

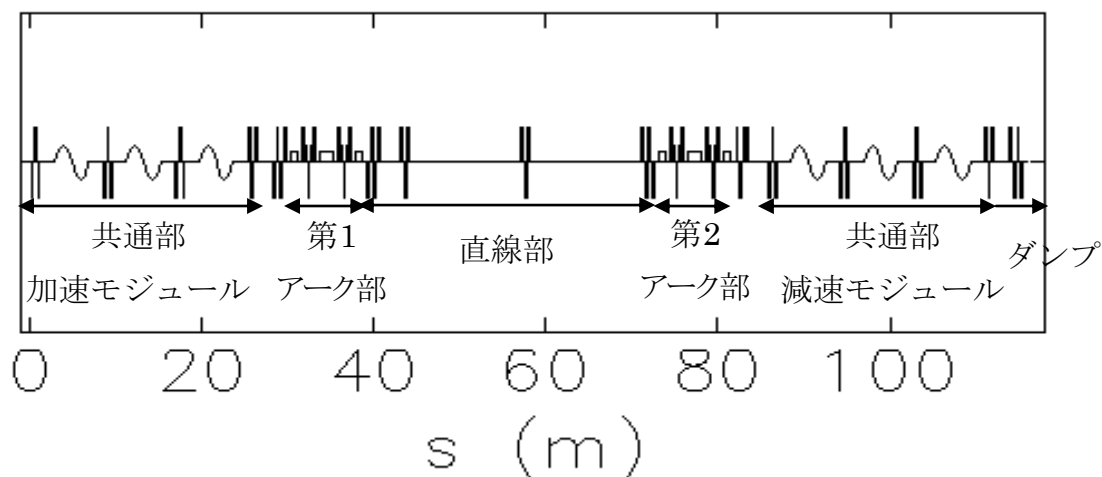


図 C.2 : ラティスの配置

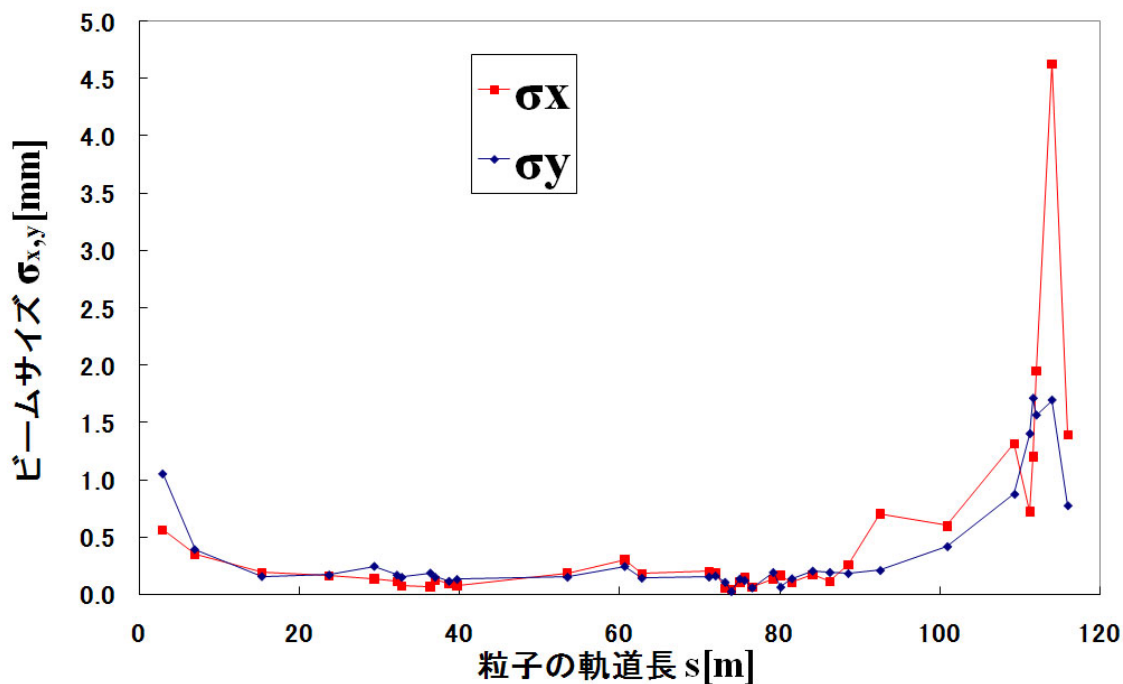


図 C.3 : 水平・垂直方向のビームサイズ

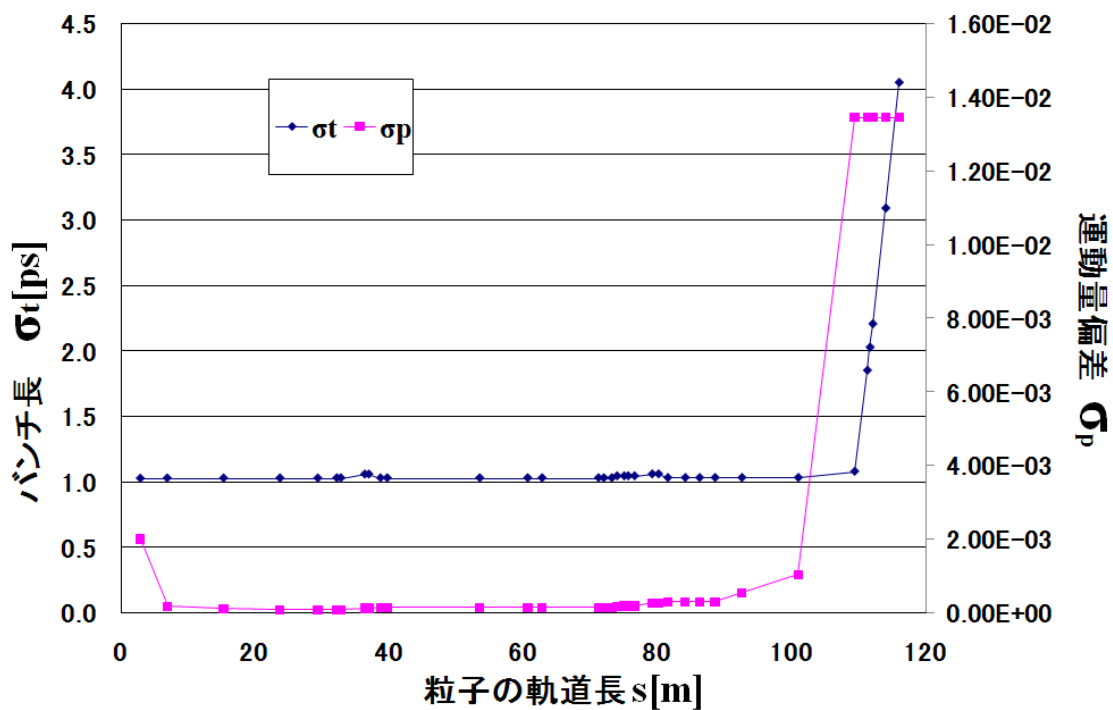


図 C.4 : バンチ長と運動量偏差

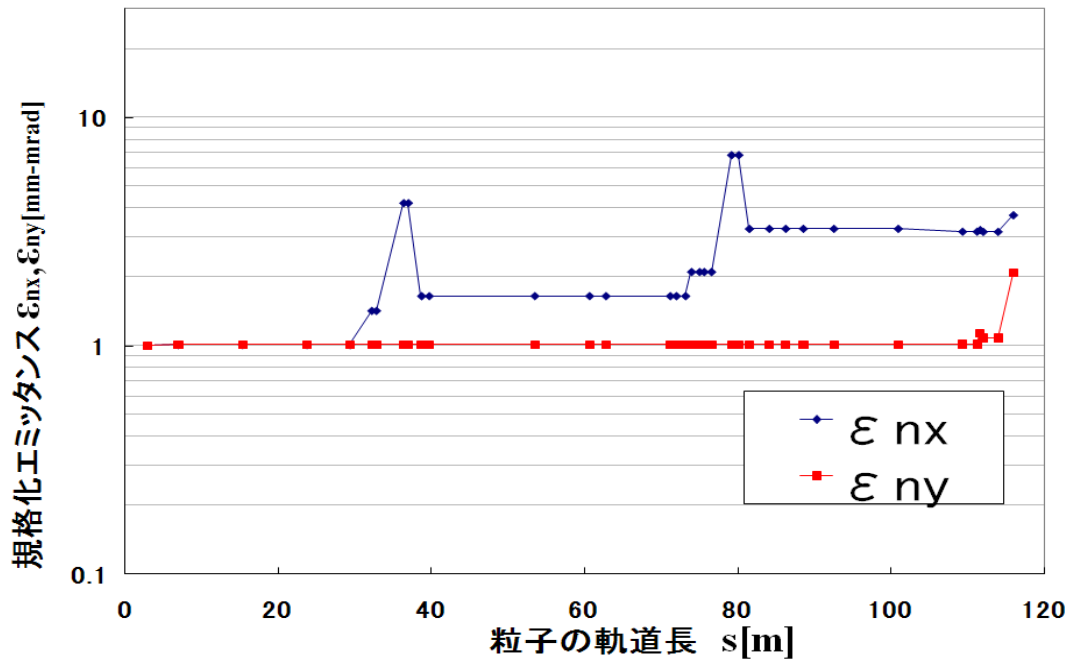


図 C.5 : 水平・垂直方向の規格化エミッタンス

表 C.2 : 平均運動量の推移

場所	平均運動量[MeV]
初期	4.9738
1つ目の加速モジュール通過後	64.9932
2つ目の加速モジュール通過後	124.9921
3つ目の加速モジュール通過後	184.9904
1つ目の減速モジュール直前	184.9148
1つ目の減速モジュール通過後	124.9524
2つ目の減速モジュール通過後	64.9535
3つ目の減速モジュール通過後	4.9341

表 C.3 : エネルギー回収率

場所	エネルギー増減[MeV]	エネルギー回収率[%]
第1モジュール	-0.0571	99.90
第2モジュール	0.0000	100.00
第3モジュール	0.0212	100.04

C.2 バンチ圧縮モード

バンチ圧縮モードの結果を示す。初期パラメータを表 C.4 に示す。この時のシミュレーション結果を、リニアオプティクスのパラメータ関数を図 C.6 に、ビームサイズ・バンチ長と運動量偏差・エミッタンスをそれぞれ図 C.7、図 C.8、図 C.9 に示す。直線部でのバンチ長は約 34.4 fs まで圧縮され、2 台モジュールの時に比べ、より圧縮出来ている。また直線部のエミッタンスも 2 台の時に比べて値が低くなっている。エネルギーが上がったため、相対的に CSR による運動量広がりが低くなったためである。

表 C.4 : 初期パラメータ

バンチ長	1 [ps]
水平規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
垂直規格化エミッタンス	1 [mm·mrad]
運動量偏差	2×10^{-3}
電荷量	77 [pC]
電流	100 [mA]
電子の入射エネルギー	5 [MeV]
加速周波数	1.3 [GHz]
加速勾配	15 [MV/m]
直線部の電子エネルギー	185 [MeV]
主加速モジュール台数	3 [台]
加速空洞長	12 [m]
加速位相のずれ角	15.10[°]
R_{56}	0.1308

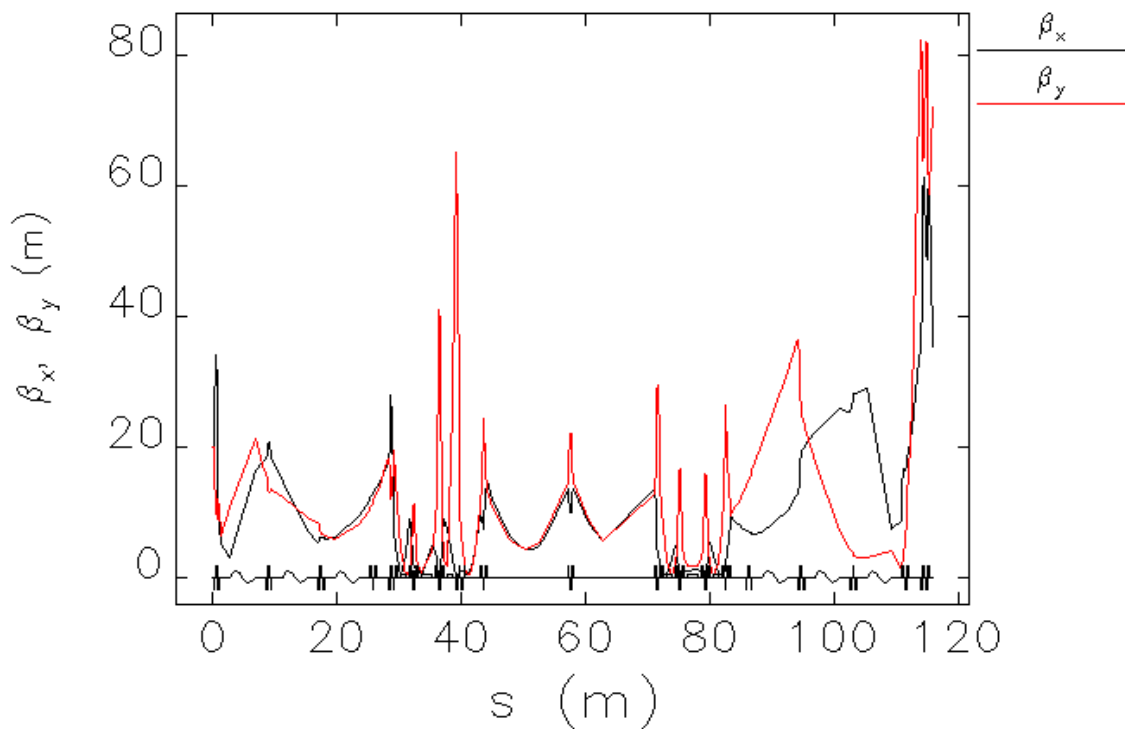


図 C.6 : リニアオプティクスのパータトロン関数

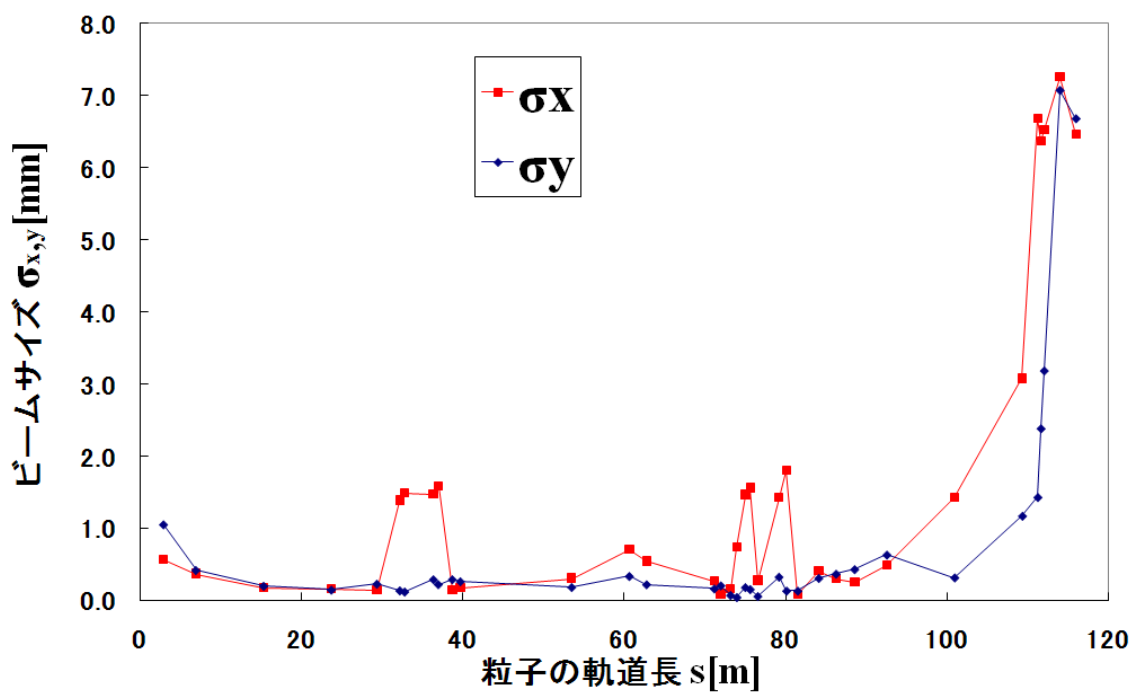


図 C.7 : 水平・垂直方向のビームサイズ

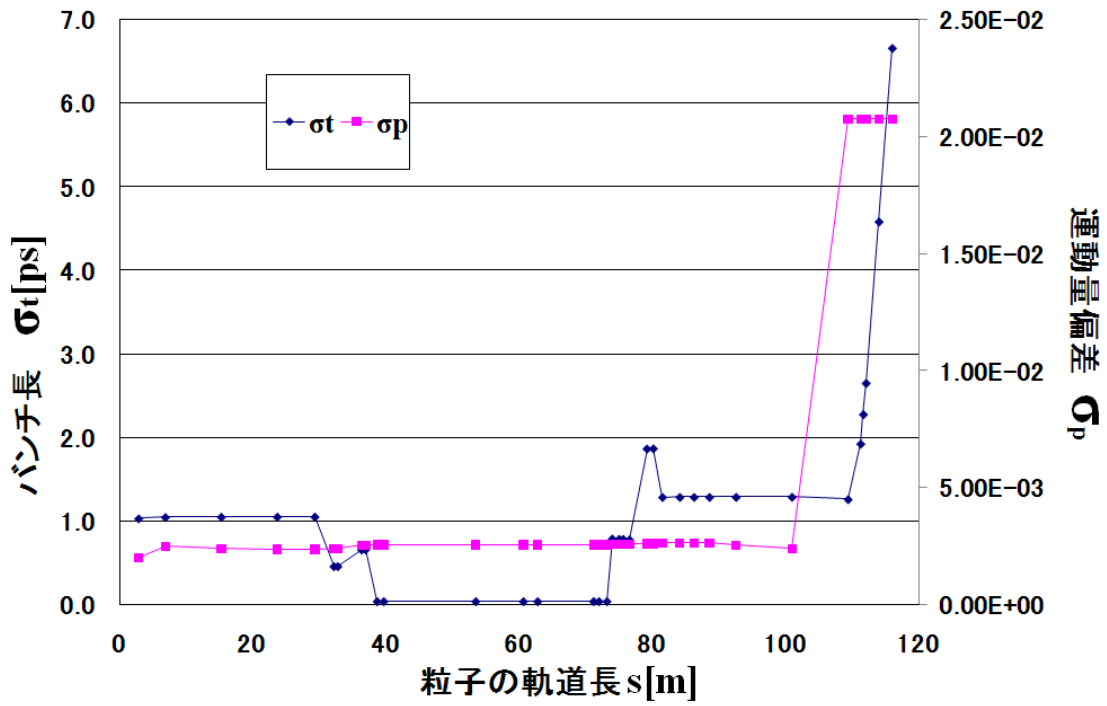


図 C.8 : バンチ長と運動量偏差

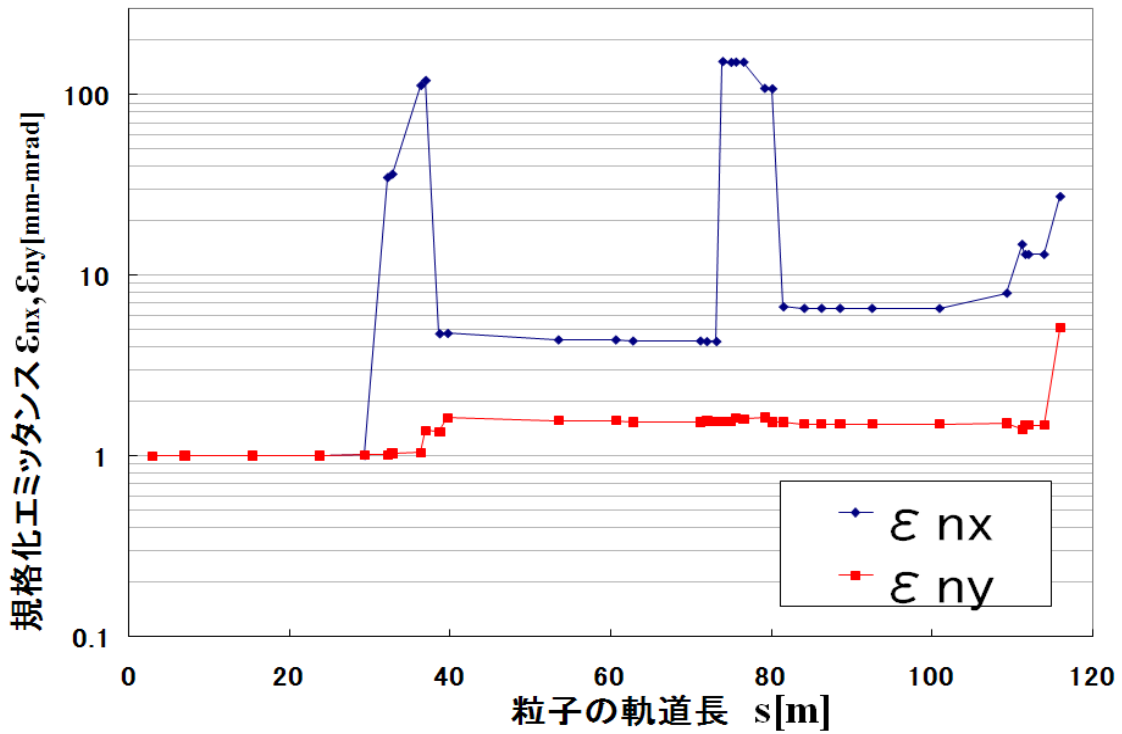


図 C.9 : 水平・垂直方向の規格化エミッタンス

参考文献

1 章

[1] 羽島良一、中村典雄、坂中章悟、小林幸則, コンパクト ERL の設計研究, KEK report 2007-7, 2008 年出版

2 章

[2] 横谷馨, ERL 入門, OHO'03, 2003

3 章

[3] 原田健太郎, 円形加速器の概略と単粒子力学の基礎, OHO'08, 2008

[4] 神谷幸秀, 加速器の原理, OHO'84, 1984

[5] J. Rosenzweig, L. Serafini, Transverse particle motion in radio-frequency linear accelerators, Physical Review E Volume49, Number2, 1599-1602, 1994

[6] S. Reiche, J.B. Rosenzweig, S. Anderson, P. Frigola, M. Hogan, A. Murokh, C. Pellegrini, L. Serafini, G. Travish, A. Tremaine, Experimental confirmation of transverse focusing and adiabatic damping in a standing wave linear accelerator, Physical Review E Volume56, Number3, 3572-3577, 1997

[7] H. Tanaka, L. Farvacque, J.L. Laclare, P. Nghiem, J. Payet, A. Ropert, A. Tkatchenko, Emittance Reduction in Electron Storage Rings, AIP Conf. Proc. Vol. 356, pp.151-162, 1996

[8] M. Sands, The Physics of Electron Storage Rings, SLAC-121, 1970

[9] J. Buon, Beam Phase Space and Emittance, Proceedings of CERN accelerator school, CERN 94-01 v1, 1994

[10] P.M. Lapostolle, Possible Emittance increase through Filamentation due to Space Charge, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-18 1101, 1971

[11] H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics: basic principles and linear beam dynamics, Springer, 1993

4 章

[12] 島田美帆, コヒーレントシンクロトロン放射光とビームダイナミクス, OHO'08, 2008

[13] E.L. Saldin, E.A. schneidmiller, M.V. Yurkov, On the coherent radiation of an electron bunch moving in an arc of a circle, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 398 (1997) 373-394

[14] M. Borland, Simple method for particle tracking with coherent synchrotron radiation, PhysRevSTAB.4.070701

[15] Ya. S. Derbenev, J. Rossbach, E.L. Saldin, V.D. Shiltsev, Microbunch Radiative Tail-Head Interaction, DESY, TESLA-FEL 95-05, 1995

[16] G. Stupakov and P. Emma, CSR Wake for a Short Magnet in Ultrarelativistic Limit, LCLA-TN-01-12, December, 2001

[17] R. Hajima, A First-Order Matrix Approach to the Analysis of Electron Beam Emittance Growth Caused by Coherent Synchrotron Radiation, Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 42, pp974-976, 2003

[18] T. Agoh, K. Yokoya, Calculation of coherent synchrotron radiation using mesh, Phys. Rev. STAB 7, 054403, 2004

5 章

[19] M. Borland, User's Manual for elegant Program Version 19.1, August 2008