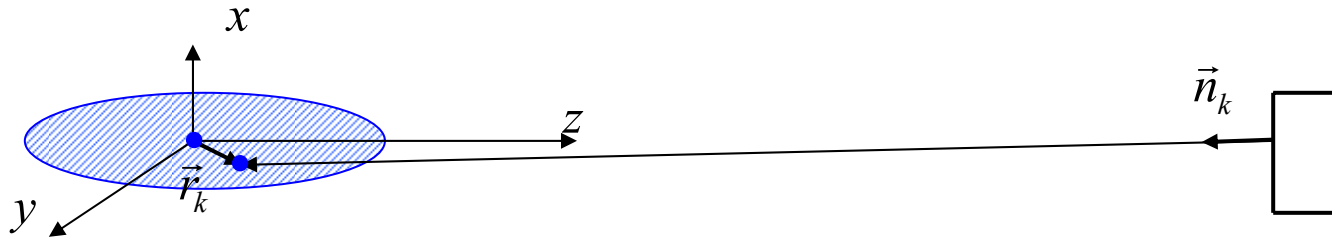


# ERL 実証機から期待される CSR 放射によるテラヘルツ光

-前座-

## 式の導出の概略



電子のバンチ内に座標系を取る。原点にある参照電子1個から放出された放射光の、検出器のところで観測される電場を  $\vec{E}(\lambda)$  とする。バンチ内の  $k$  個目の電子からの電場は、参照電子からの位相差を考慮して、

$$\vec{E}_k(\lambda) = \vec{E}(\lambda) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n}_k \cdot \vec{r}_k}$$

と書ける。ただし、 $\vec{n}_k$  は検出器から電子へ向かう単位ベクトル、 $\vec{r}_k$  はバンチ内での  $k$  個目の電子の位置である。バンチ内の電子について和を取れば、検出器の場所での全電場、光の強さが計算できる。

$$\vec{E}_{total}(\lambda) = \vec{E}(\lambda) \sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n}_k \cdot \vec{r}_k}, \quad P_{total}(\lambda) \propto |\vec{E}(\lambda)|^2 \left| \sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n}_k \cdot \vec{r}_k} \right|^2$$

和の部分について、展開して計算を進める。

$$\left| \sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n}_k \cdot \vec{r}_k} \right|^2 = \left| \sum_{j=1}^N e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n}_j \cdot \vec{r}_j} \sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n}_k \cdot \vec{r}_k} \right| = \left| N + \sum_{j \neq k} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (\vec{n}_k \cdot \vec{r}_k - \vec{n}_j \cdot \vec{r}_j)} \right|$$

ここで、和を積分に置き換える。 $\int S(r) dr = 1$  を規格化した電子の分布とすると、 $r$  から  $r + \Delta r$  の間にいる電子の数は、 $NS(r)\Delta r$  となる。また、横方向のエミッタンスはゼロと見なし、分布は座標軸に対して対称 ( $S(-r) = S(r)$ ) とする。

$$\sum_{j \neq k} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (\vec{n}_k \cdot \vec{r}_k - \vec{n}_j \cdot \vec{r}_j)} = N(N-1) \int dr \int dr' e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} S(r) S(r') \approx N(N-1) \left| \int dz e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z} S(z) \right|^2$$

従って、

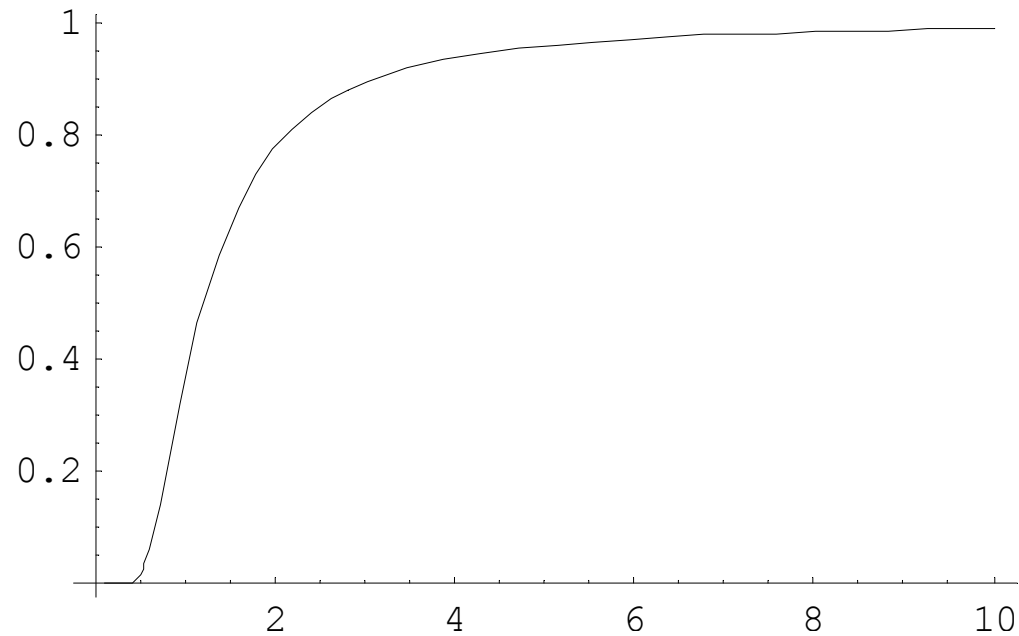
$$P_{total}(\lambda) = P_{incoh}(\lambda) (1 + (N-1)f(\lambda))$$

ただし、 $f(\lambda) = \left| \int dz e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z} S(z) \right|^2$  である。

電子の分布がガウス分布の場合、 $S(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_z}} e^{-\left(\frac{z}{\sigma_z}\right)^2}$ 、 $f(\lambda) = e^{-\left(\frac{2\pi\sigma_z}{\lambda}\right)^2}$  となる。

参考文献: E.B.Blum, "Observation of coherent synchrotron radiation at the Cornell linac", NIM A307, (1991), pp568-576

ちなみに  $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$  は以下のような関数である。



$x = 1$  で 0.37、 $x = 10$  で 0.99 である。

バンチ電荷が 77pC の場合、粒子数は  $4.8 \times 10^8$  個。すなわち、光の波長が  $\lambda = 2\pi\sigma_z$  の時、光の強さは通常の放射光に対しておよそ  $10^8$  倍強くなることが分かる。(臨界波長としては曲線の立ち上がり付近の値である  $\lambda = 2\sigma_z$  がよく使われる様である。)

## 臨界周波数と臨界角

放射光の強度は、ベッセル関数を使って

$$\frac{d^2 P_{incoh}}{d\omega d\Omega} = \frac{3e^2 \gamma^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 (1 + \gamma^2 \theta^2) \left( BesselK_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} BesselK_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right)$$

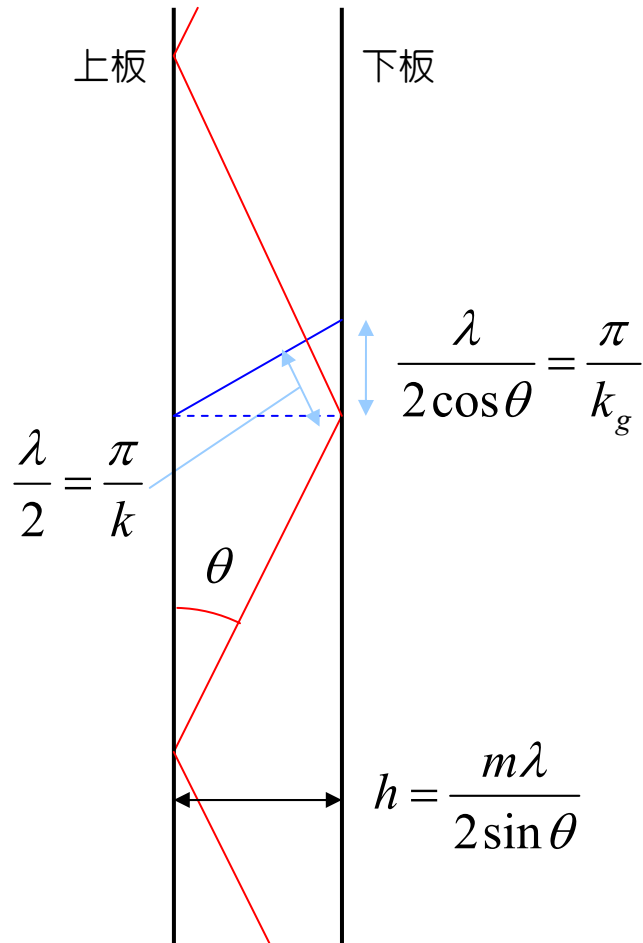
と書ける。ただし、 $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$ 、 $\xi = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{\frac{3}{2}}$ 、 $\gamma$ はローレンツ因子、 $\theta$ は光軸から測った観測角、 $\varepsilon_0$ は真空中の誘電率、 $e$ は電子の電荷で $c$ は光速である。

ちなみに、Bessel 関数の引数 $\xi$ の条件から臨界振動数 $\omega_c$ や臨界発散角を決めることができる。光軸上で $\xi = \frac{1}{2}$ になる振動数を臨界振動数という。また、 $\omega \ll \omega_c$ の時の角度広がりを考

え、 $\xi \approx 1$ になる角度を臨界角といい、 $\theta_c = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2\omega_c}{\omega} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{3c}{\omega\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$ である。(ちなみに $\omega \gg \omega_c$ の場合

に強度が $\frac{1}{e}$ になる値として定義される臨界角は $\theta_c = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\omega_c}{3\omega}}$ である。)

## 遮蔽の効果



完全導体の平行平板間の TE 波の伝送を考える。平板間を反射しながら通り、入射波と反射波の干渉で平板上の電場がゼロになり、境界条件を満たすという描像を考える。

右図に示すとおり、モード番号と平板の幅が決まっている時、ある波長に対してどのくらいの角度で入射しなければいけないかが決まってしまう。波長が短くなるに従い、入射角が 90 度に近づき、90 度になった時、波が進まなくなるのでカットオフとなる。通常のカットオフは  $\lambda_c = 2h$  である。(斜めに進むので電力の速度(群速度)は遅くなる。)

放射光の場合はもともと臨界角の範囲しか光がないため、カットオフ計算を 90 度でなく、臨界角で行う。すなわち、カットオフの条件は

$$\lambda_c = 2h \sin \theta_c \sim 2h\theta_c = 2\sqrt{\frac{3h^3}{\pi\rho}} \sim 2\sqrt{\frac{h^3}{\rho}}$$

となる。

(求め方から分かる通り、かなり粗い目安である。)

## 各種パラメータのまとめ

- 放射光の強度

$$P_{total}(\lambda) = P_{incoh}(\lambda)(1 + (N-1)f(\lambda)), \quad f(\lambda) = e^{-\left(\frac{2\pi\sigma_z}{\lambda}\right)^2}$$

- 通常の放射光の臨界振動数

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$$

- CSR 放射の臨界振動数

$$\omega_{c-csr} = \frac{\pi c}{\sigma_z} \quad (\lambda_{c-csr} = 2\sigma_z)$$

- CSR 放射の遮蔽振動数

$$\omega_{cut-off} = \pi c \sqrt{\frac{\rho}{h^3}} \quad \left( \lambda_{cut-off} = 2\sqrt{\frac{h^3}{\rho}} \right)$$

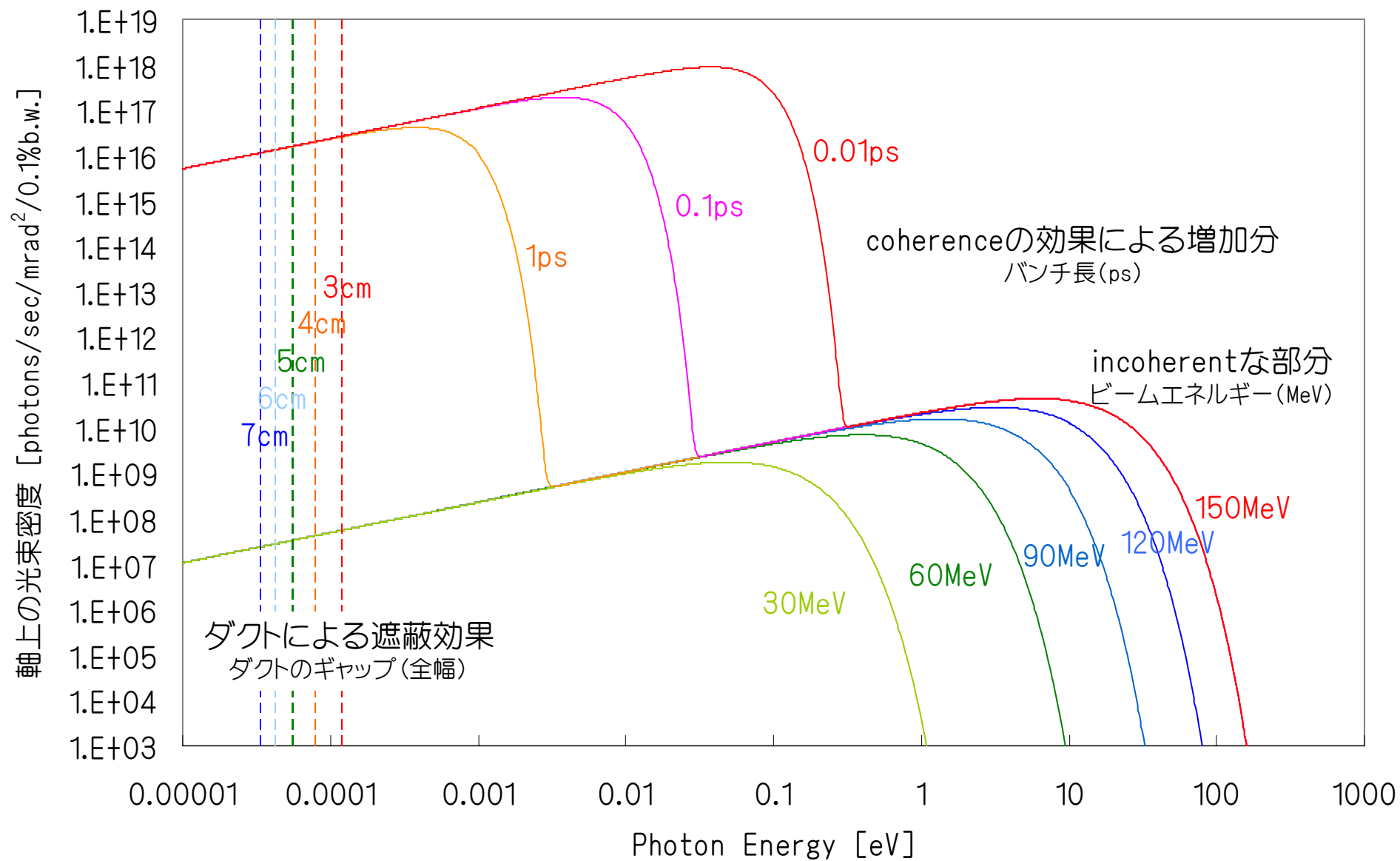
- 従って CSR は  $\omega_{cut-off} < \omega < \omega_{c-csr} (< \omega_c)$  の範囲で発生。

補足： Flux density? Brightness? Brilliance?

- 言葉の定義には若干の曖昧さがある。
- 以下で「光束密度」とするのは、単位立体角、単位時間、0.1%バンド幅あたりの光子の数である。
- 昔はその「光束密度」を”flux density”、それを光源の発散角で割った値を”Brightness”、さらにそれを光源のサイズで割った値を”Brilliance”と言った。
- 現在、一般的には、以下で「光束密度」と言ってしまった値を発散角で割った値（昔の”Brightness”）を Flux density、それをさらに光源サイズで割った値を（昔の”Brilliance”）を Brilliance または Brightness というとのこと。
- ということで、以下でプロットする値は光源の発散角で割っていない値である。



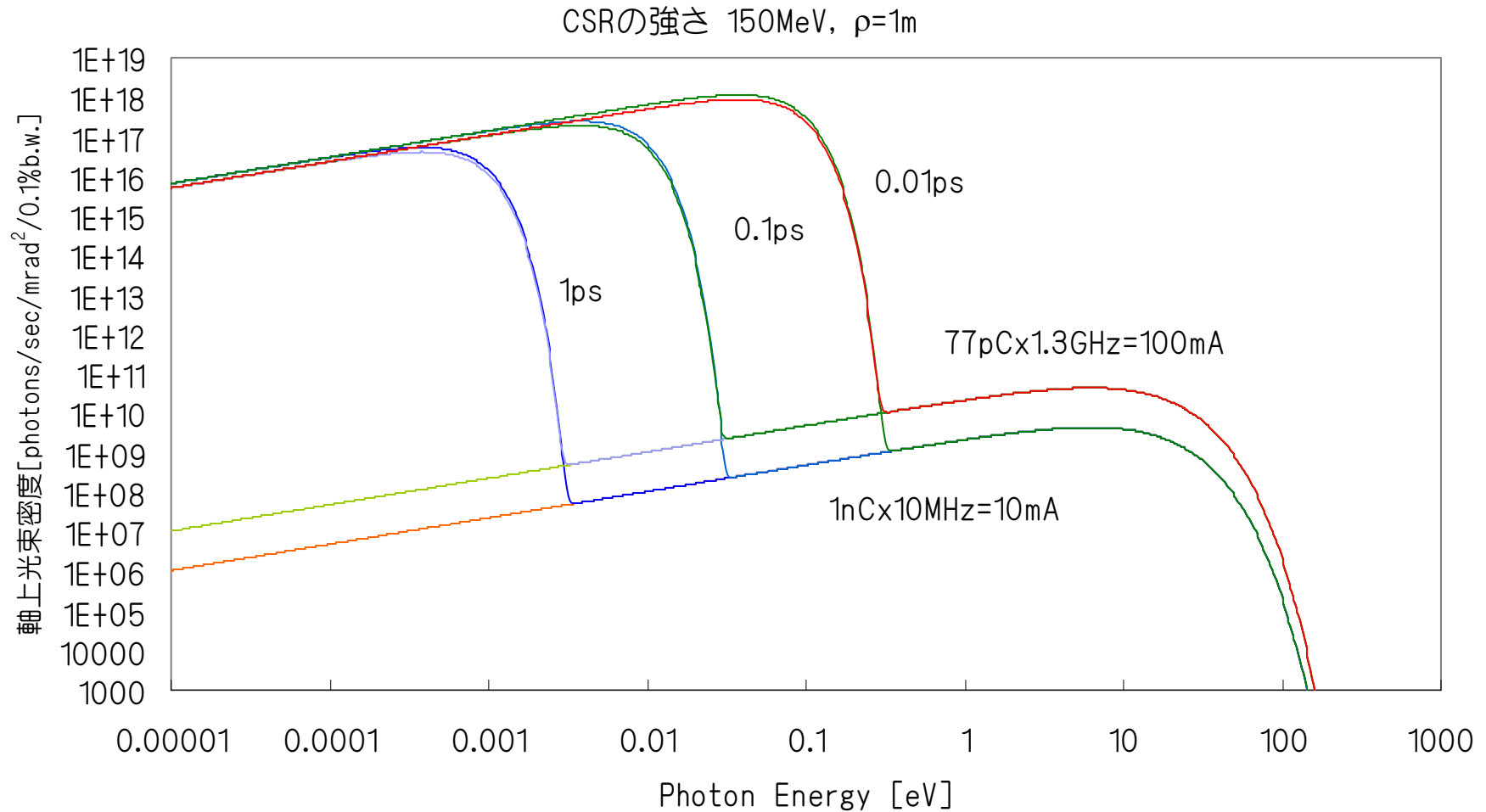
CSRの強さ 77pC,1.3GHz, $\rho=1m$



(coherent 部分の裾まで incoherent な Flux がない場合、下の線に差を足した撫で肩のグラフになる。  
例えば、30MeV で 0.01ps, 0.1ps, 60MeV で 0.01ps などの場合。)

## 1nCの方が得か？

- 77pCの場合、バンチ内の電子数は  $4.8 \times 10^8$  個、1nCの場合は  $6.2 \times 10^9$  個。
- coherenceの効果では1桁しか上がらない。
- 時間平均で同じ光束を得る為には、およそ 10MHz の繰り返しが必要。(10mA)
- パルスあたりの光子数、coherent な割合はもちろんこちらの方が大きい。



## 放射光の角度広がりと円偏光の利用

$$\frac{d^2 P_{incoh}}{d\omega d\Omega} = \frac{3e^2 \gamma^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left( 1 + \gamma^2 \theta^2 \right) \left( \text{Bessel}K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \text{Bessel}K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right)$$

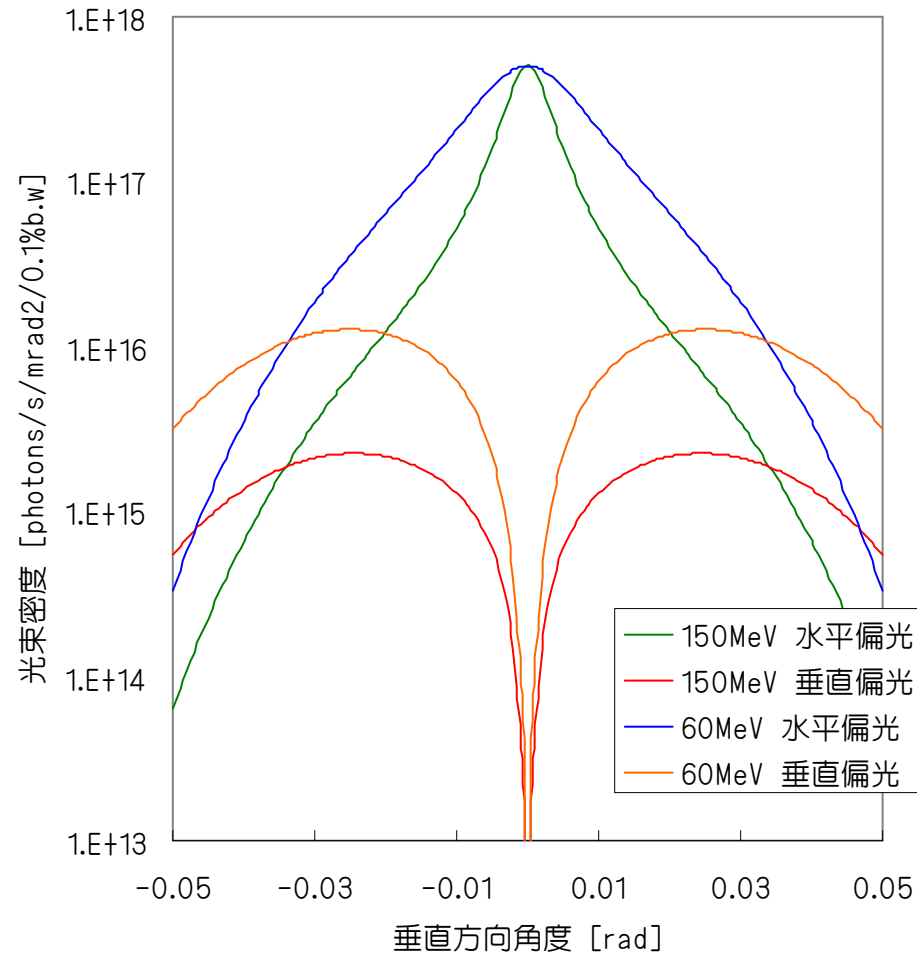
水平偏光

垂直偏光

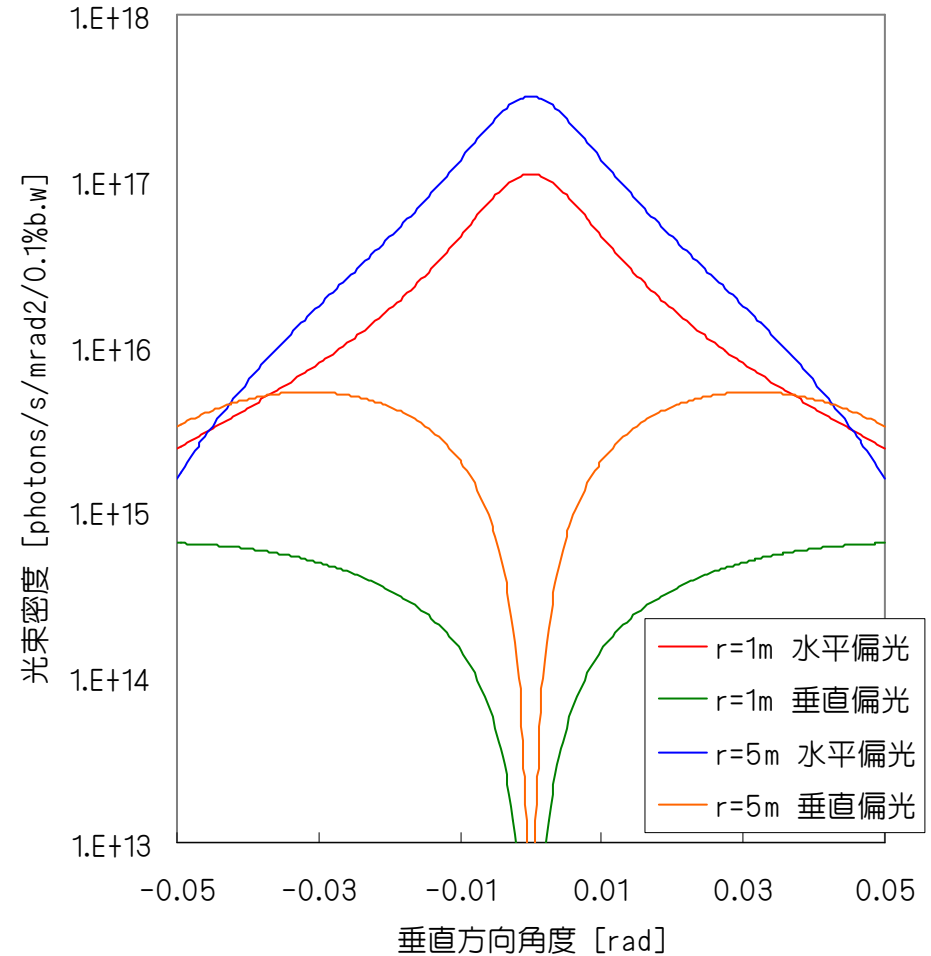
- 光のエネルギーが低いため、縦方向の光の広がりが大きい。
- 光軸からずれた垂直偏光成分が十分な大きさを持ち、楕円偏光・円偏光として利用可能。

## 縦方向の発散角と偏光度

発散角と偏光度 77pC,1.3GHz  
r=1m,光のエネルギー0.01eV



発散角と偏光度 77pC,1.3GHz  
60MeV,光のエネルギー1meV



- 図中で  $r$  は偏向電磁石の曲率半径  $\rho$ 。
- 1meV で円偏光を使いたい場合、偏向電磁石の曲率半径を、例えば 5m にすれば、40mrad 付近で円偏光となる。(その角度でフロントエンドやビームラインができるかどうかは別。)